

Billards dans les polygones, surfaces plates, et dynamique dans les espaces de modules

Anton Zorich

Ker Lann, 25 janvier 2011

Des billards aux surfaces plates

- Billards polygonaux
- Trajectoires fermées
- Challenge
- Motivation pour étudier les billards
- Gaz de deux molécules
- Dépliage
- Surfaces plates
- Polygones rationnels
- Billard dans un rectangle
- Lignes droites sur le tore
- Espace de réseaux
- Espace de tores plats
- Constante de Siegel–Veech

Surfaces très plates

Surfaces à petits carreaux

Comptage des géodésiques fermées

Billards dans des polygones rectangulaires

Des billards aux surfaces plates

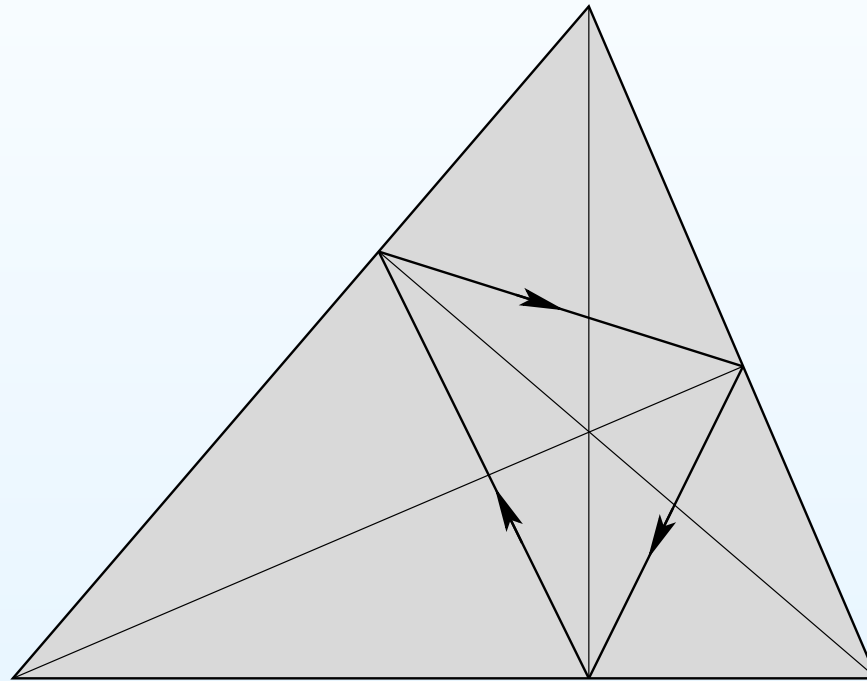
Billards dans les polygones

Moon Duchin joue au billard sur une table en forme de L



Trajectoires fermées

Il est facile de trouver une trajectoire fermée de billard dans un triangle aigu.



Exercice Démontrer que la ligne brisée joignant les pieds des trois hauteurs d'un triangle aigu est une trajectoire fermée de billard (elle s'appelle *la trajectoire de Fagnano*). Démontrer que la trajectoire de Fagnano représente un triangle inscrit de périmètre minimal.

Challenge

C'est difficile à croire, mais un problème similaire pour un triangle obtus est ouvert !

Problème ouvert. *Y a-t-il au moins une trajectoire fermée dans (presque) chaque triangle obtus ?*

Challenge

C'est difficile à croire, mais un problème similaire pour un triangle obtus est ouvert !

Problème ouvert. *Y a-t-il au moins une trajectoire fermée dans (presque) chaque triangle obtus ?*

Il semble que la réponse soit affirmative (voir la recherche combinatoire effectuée par R. Schwartz et P. Hooper en utilisant l'ordinateur : www.math.brown.edu/~res/Billiards/index.html)

Challenge

C'est difficile à croire, mais un problème similaire pour un triangle obtus est ouvert !

Problème ouvert. *Y a-t-il au moins une trajectoire fermée dans (presque) chaque triangle obtus ?*

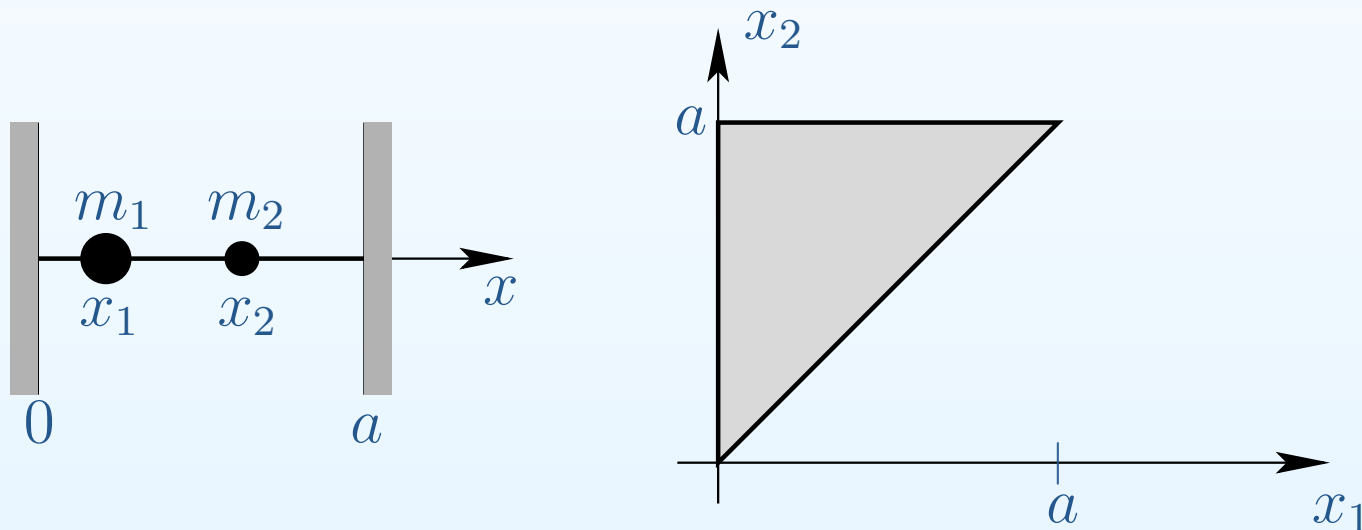
Il semble que la réponse soit affirmative (voir la recherche combinatoire effectuée par R. Schwartz et P. Hooper en utilisant l'ordinateur : www.math.brown.edu/~res/Billiards/index.html)

Si c'est le cas, nous aurons d'autres questions ouvertes :

- *Estimer le nombre $N(L)$ des trajectoires périodiques de longueur inférieure à L quand $L \rightarrow +\infty$.*

Motivation pour étudier les billards : gaz de deux molécules dans une chambre unidimensionnelle

Considérons deux billes percées (nos “molécules”) mises sur une barre commune. On suppose que la barre est posée entre deux murs. Les collisions des billes avec les murs et entre elles sont élastiques (sans perte d'énergie).



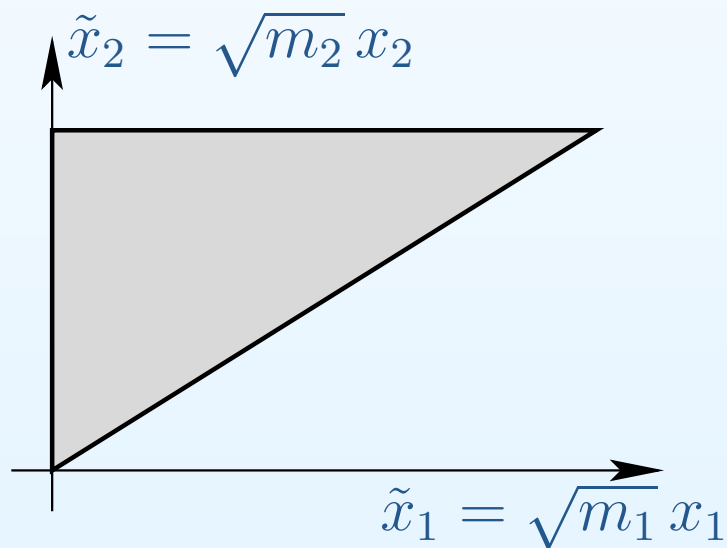
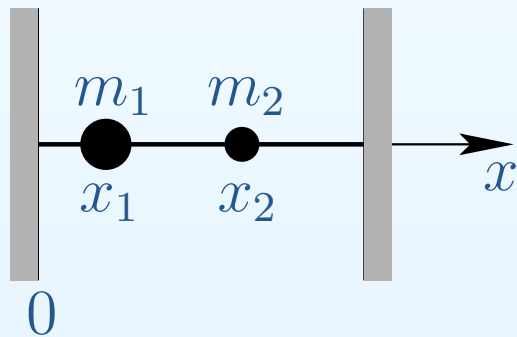
En négligeant les tailles des billes, nous pouvons décrire l'état de notre système de billes par les coordonnées $0 < x_1 \leq x_2 \leq a$ de billes, où a est la distance entre les murs. Ceci donne un triangle rectangle isocèle.

Gaz de deux molécules

En normalisant les coordonnées par les racines carrées des masses

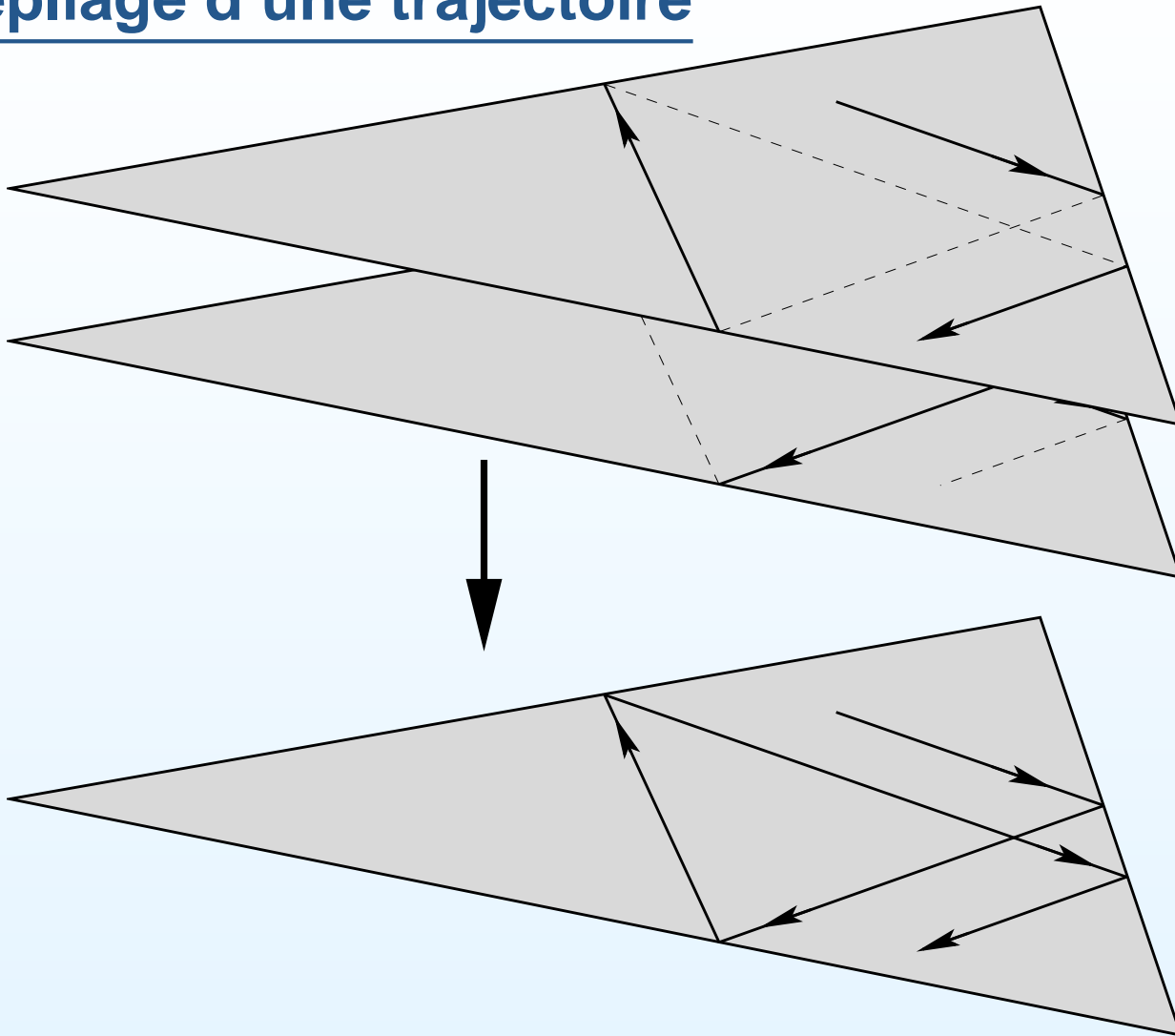
$$\begin{cases} \tilde{x}_1 &= \sqrt{m_1} x_1 \\ \tilde{x}_2 &= \sqrt{m_2} x_2 \end{cases}$$

nous obtenons un nouveau triangle rectangle Δ comme espace de configuration.



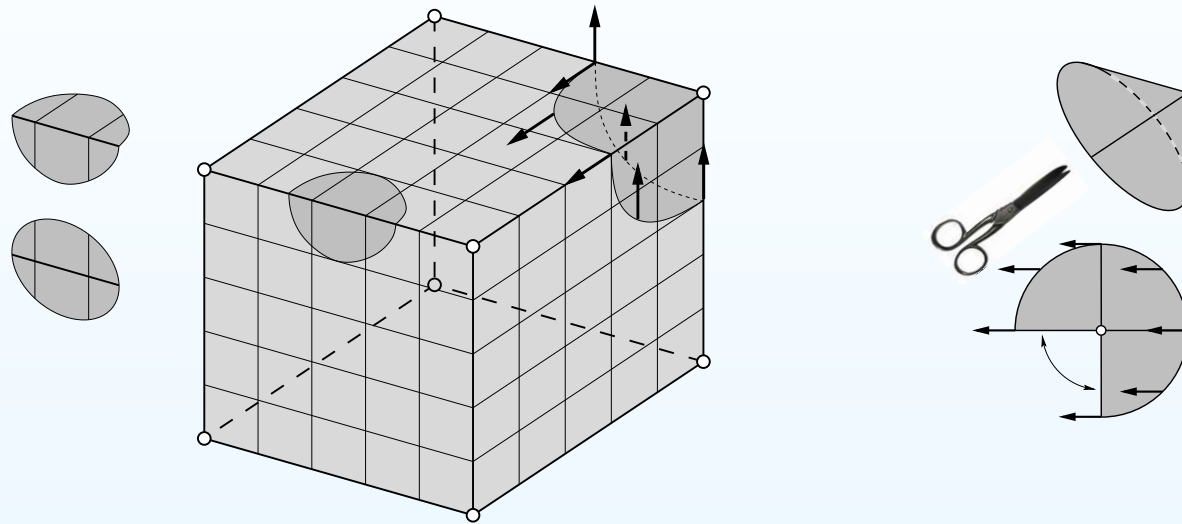
Lemme Dans les coordonnées $(\tilde{x}_1, \tilde{x}_2)$ les trajectoires du système de deux billes correspondent aux trajectoires de billard dans le triangle Δ .

Dépliage d'une trajectoire



En identifiant les bords des triangles nous obtenons une sphère plate.
Une trajectoire de billard se relève en “une ligne droite” sur cette sphère.

Surfaces plates

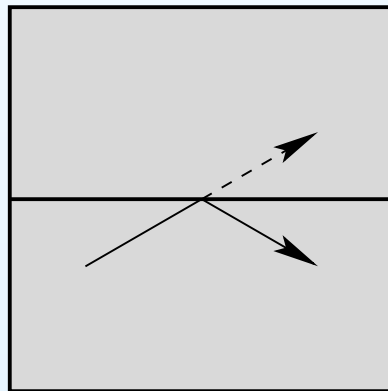


La surface d'un cube représente une sphère plate avec huit singularités coniques. La métrique plate est *non singulière* sur les côtés !

Un transport parallèle autour d'une singularité conique change la direction initiale d'un vecteur tangent donc l'holonomie de la métrique plate est non triviale.

Polygones rationnels

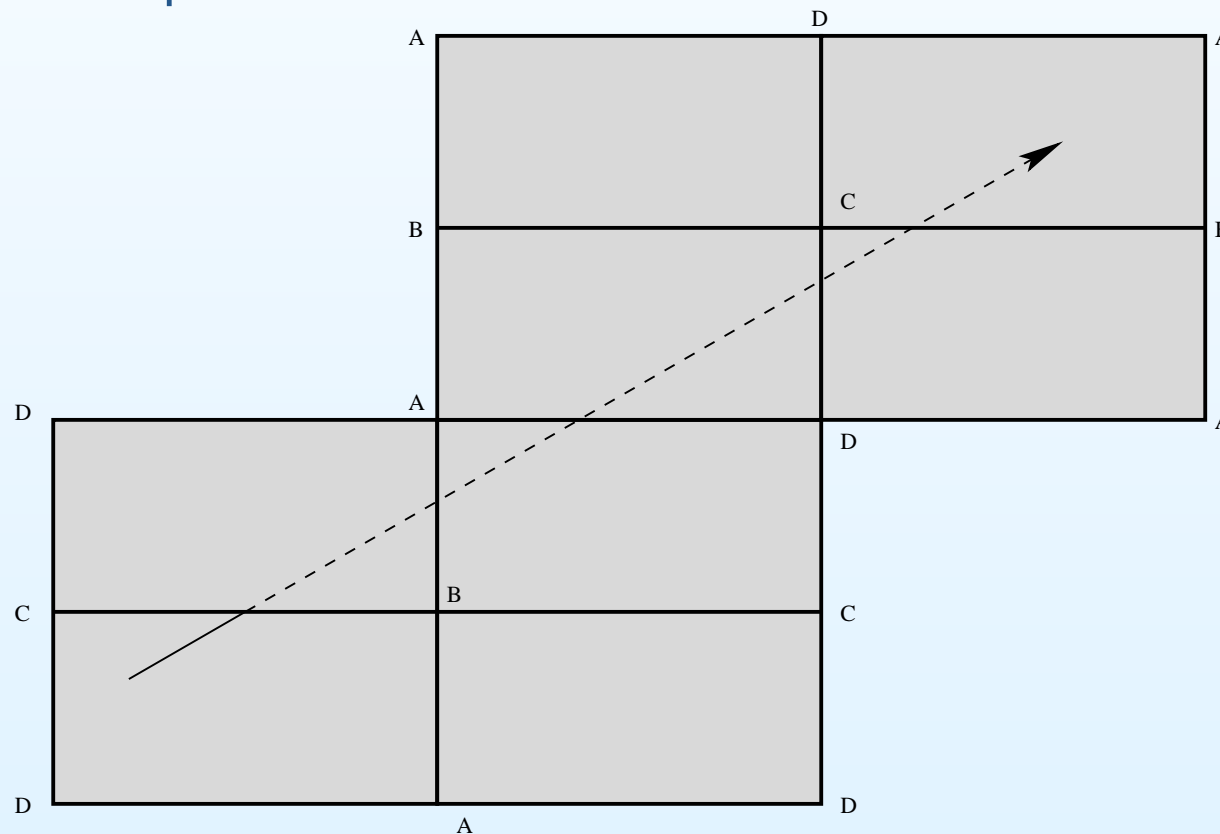
Un polygone Π est appelé un **polygone rationnel** si tous les angles de Π sont des multiples rationnels $\frac{p_i}{q_i} \pi$ de π . On connaît les propriétés des billards dans les polygones rationnels beaucoup mieux que les propriétés des billards génériques. Étudions l'exemple modèle d'un billard dans un rectangle. Au lieu de considérer la réflexion de la trajectoire on peut considérer la réflexion miroir de la table.



Il est facile de vérifier que la trajectoire se prolonge en ligne droite. En pliant les deux copies des rectangles le long du côté commun on obtient la vraie trajectoire du billard.

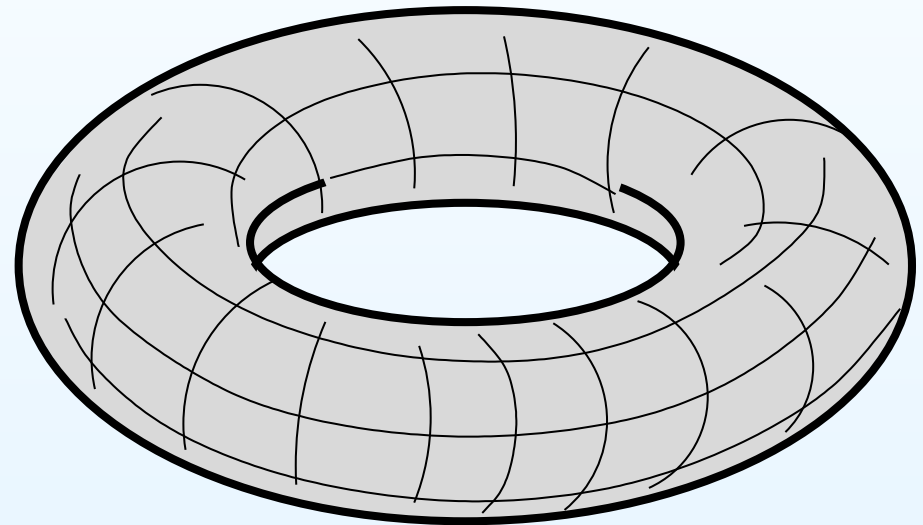
Billard dans un rectangle

Fixons une trajectoire générique. À tout moment la boule bouge dans une des quatre directions spécifiques pour la trajectoire. Ces directions sont représentées par les quatre copies de la table de billard ; d'autres copies de la table peuvent être obtenues à partir de ces quatre copies par une translation parallèle :



Billard dans un rectangle et un flot sur un tore

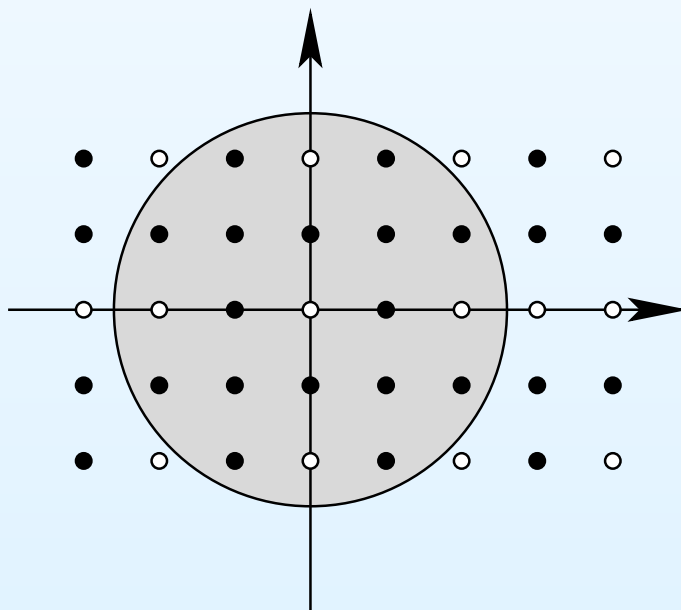
En identifiant des copies équivalentes de la table par les translations parallèles, nous obtenons un tore ; une trajectoire du billard se relève en “une ligne droite” sur le tore correspondant.



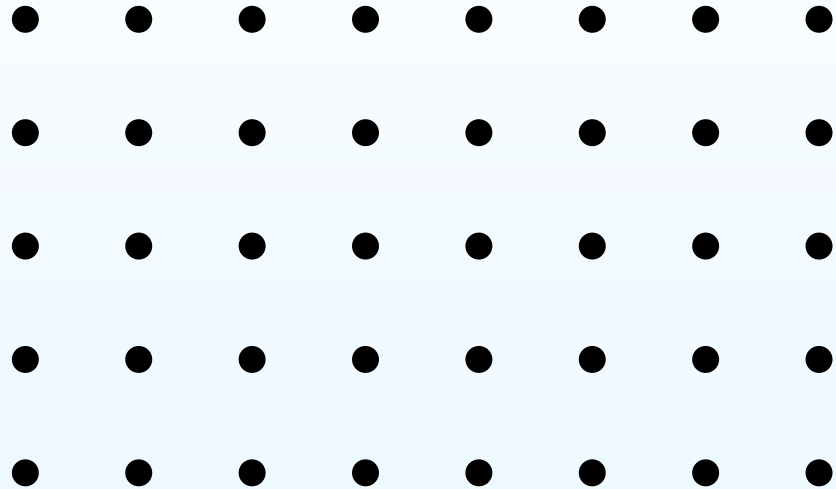
Lignes droites sur le tore

Exercice. Considérons un tore obtenu à partir d'un carré unitaire.

- Chaque trajectoire dans une direction irrationnelle est dense.
- Les trajectoires périodiques correspondent aux directions rationnelles $\vec{v} = (n, m)$, où $\text{pgcd}(n, m) = 1$. Toutes les trajectoires dans une direction rationnelle ont la même longueur $\sqrt{n^2 + m^2}$, donc le nombre $N_{cg}(L)$ de (types de) trajectoires fermées orientées de longueur au plus L est égal au nombre de points primitifs (n, m) , $\text{pgcd}(n, m) = 1$, d'un réseau entier $\mathbb{Z} \oplus \mathbb{Z}$ satisfaisant la condition $\sqrt{n^2 + m^2} \leq L$.

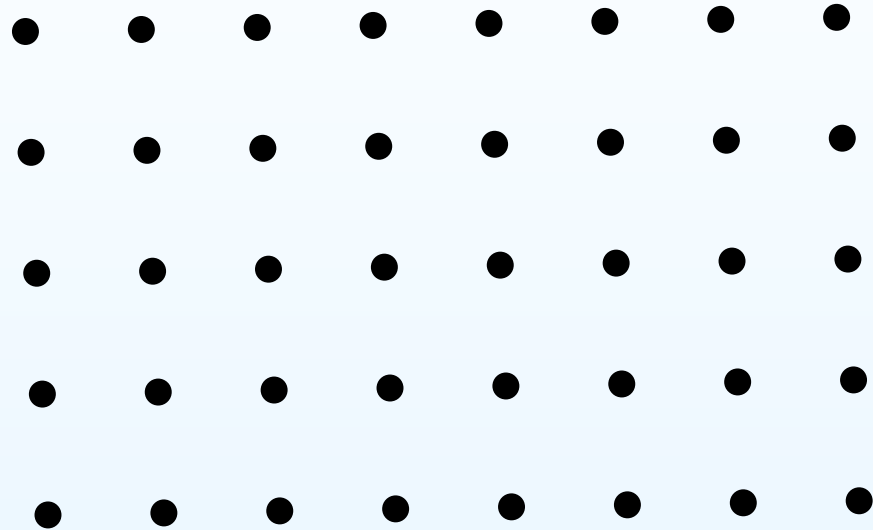


Espace de réseaux



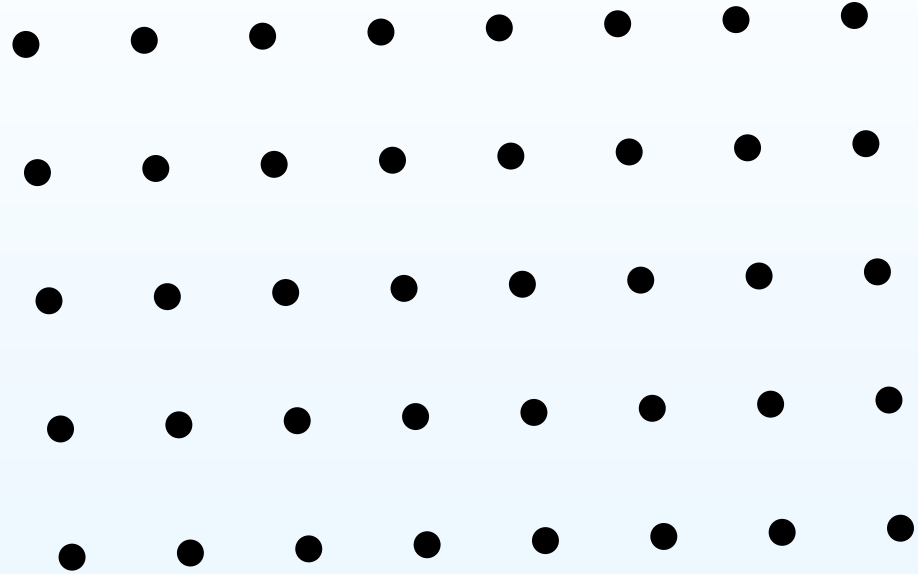
Au lieu d'un seul réseau entier on peut considérer une famille de tous les réseaux. On peut déformer continûment les réseaux.

Espace de réseaux



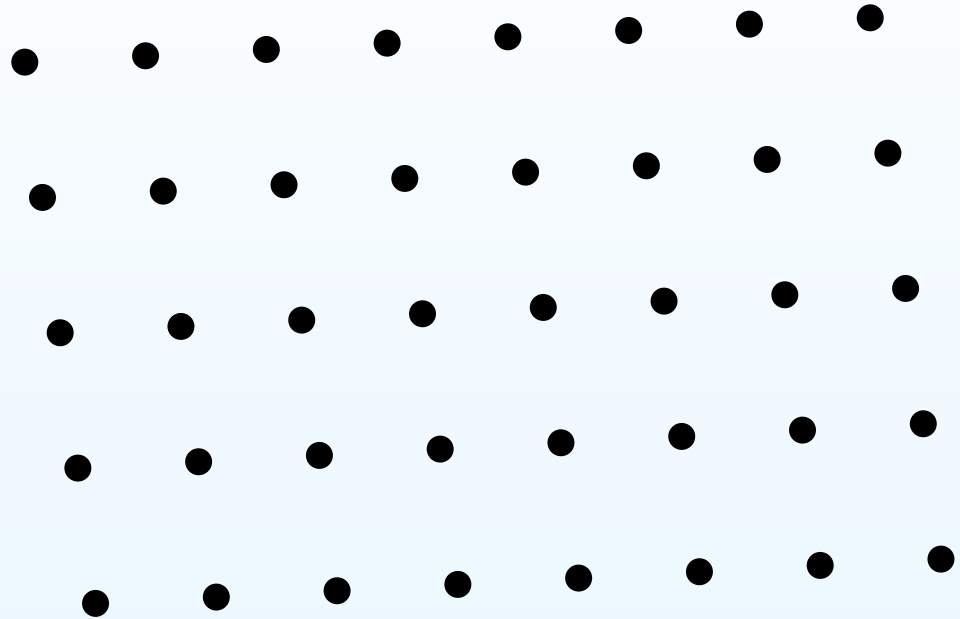
Au lieu d'un seul réseau entier on peut considérer une famille de tous les réseaux. On peut déformer continûment les réseaux.

Espace de réseaux



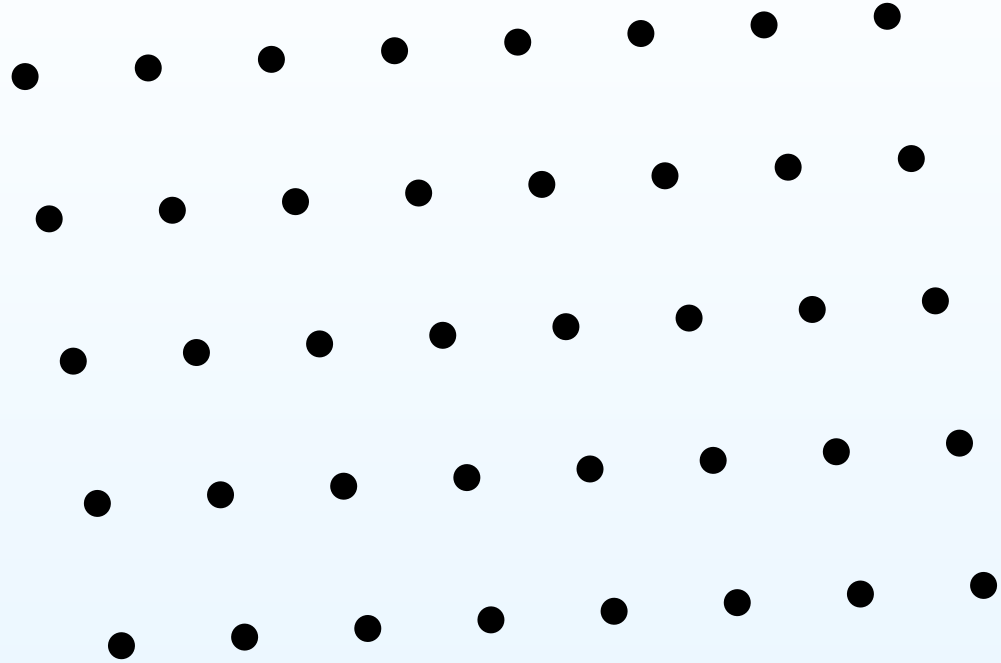
Au lieu d'un seul réseau entier on peut considérer une famille de tous les réseaux. On peut déformer continûment les réseaux.

Espace de réseaux



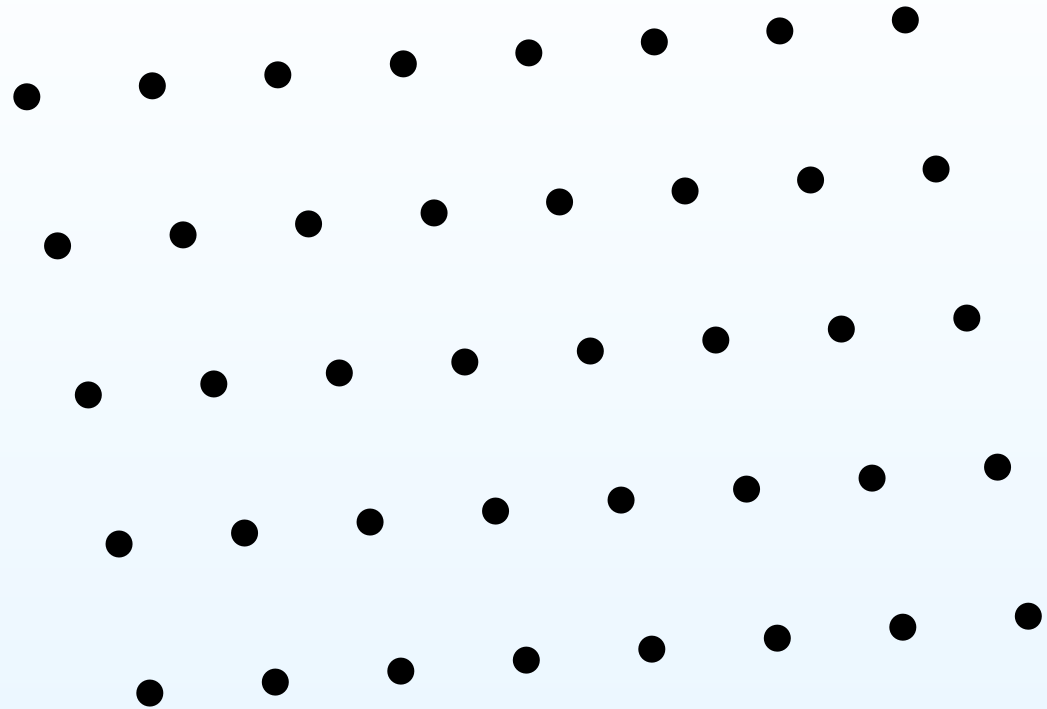
Au lieu d'un seul réseau entier on peut considérer une famille de tous les réseaux. On peut déformer continûment les réseaux.

Espace de réseaux



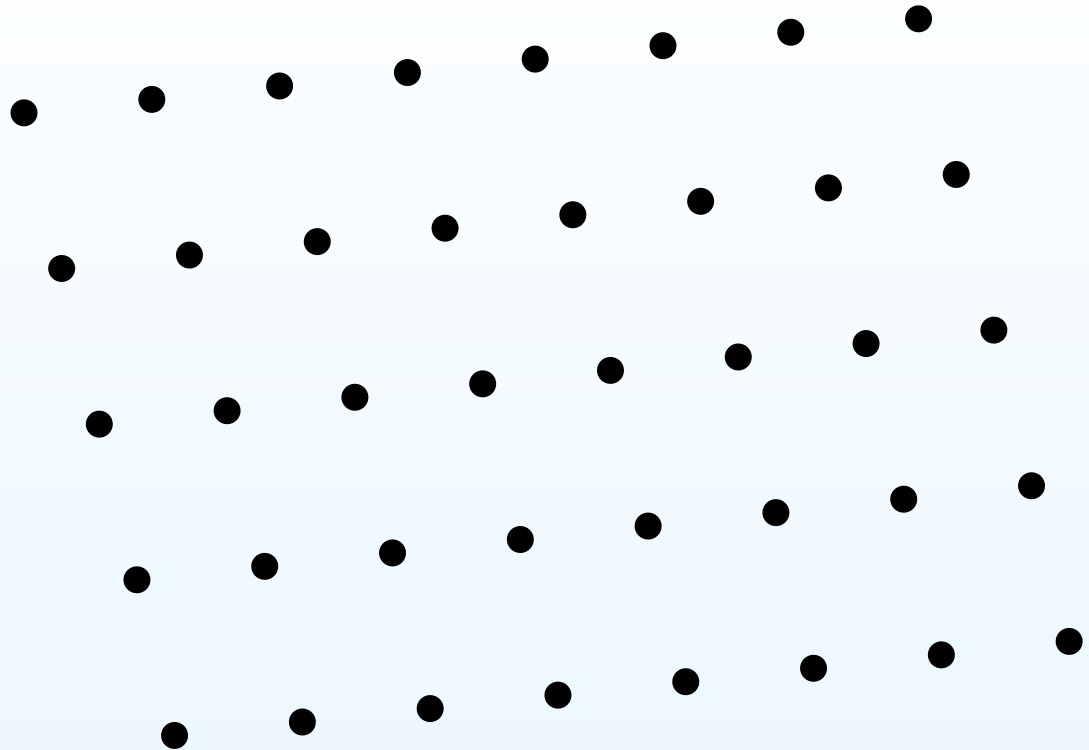
Au lieu d'un seul réseau entier on peut considérer une famille de tous les réseaux. On peut déformer continûment les réseaux.

Espace de réseaux



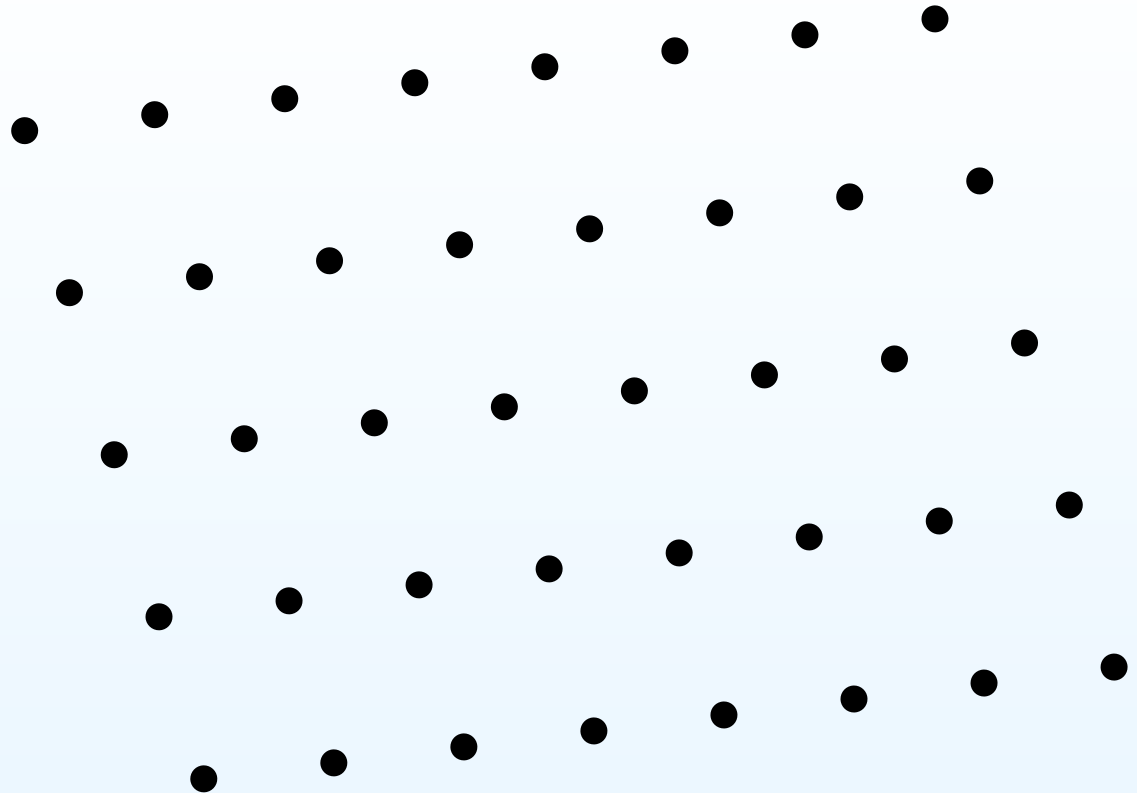
Au lieu d'un seul réseau entier on peut considérer une famille de tous les réseaux. On peut déformer continûment les réseaux.

Espace de réseaux



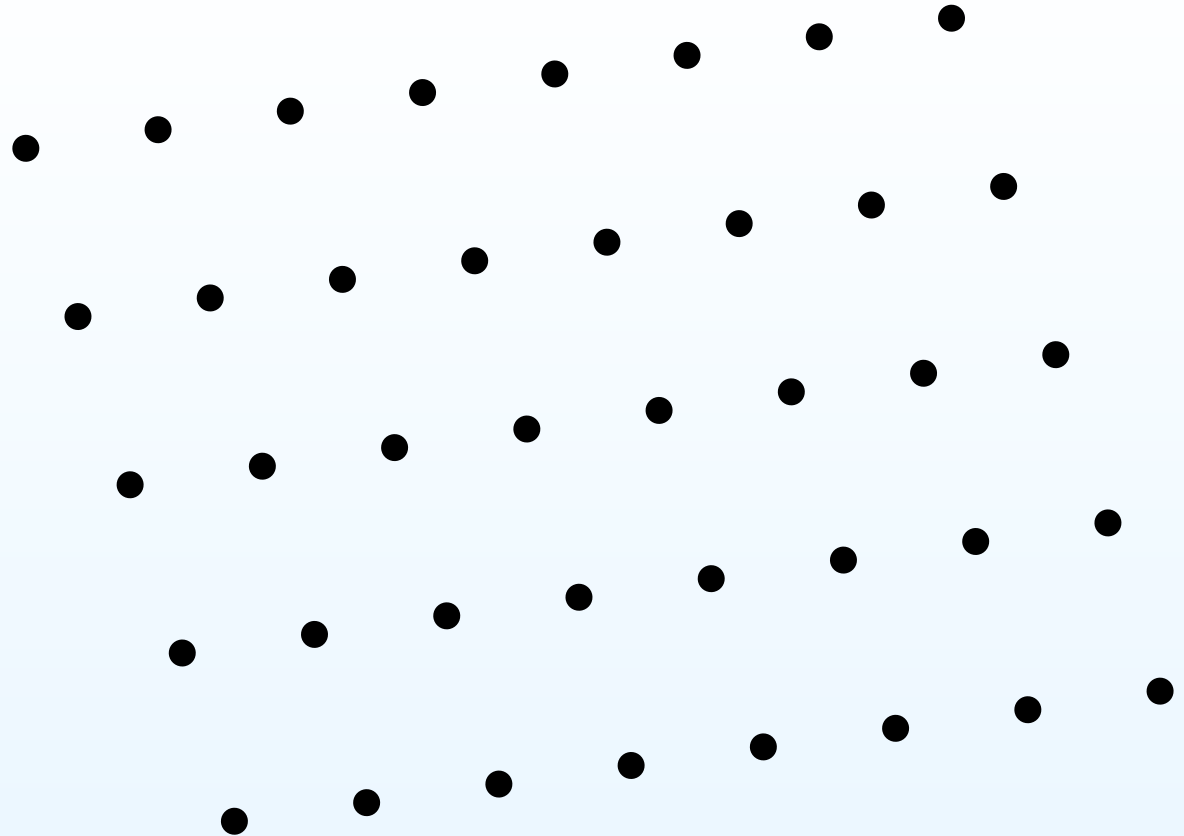
Au lieu d'un seul réseau entier on peut considérer une famille de tous les réseaux. On peut déformer continûment les réseaux.

Espace de réseaux



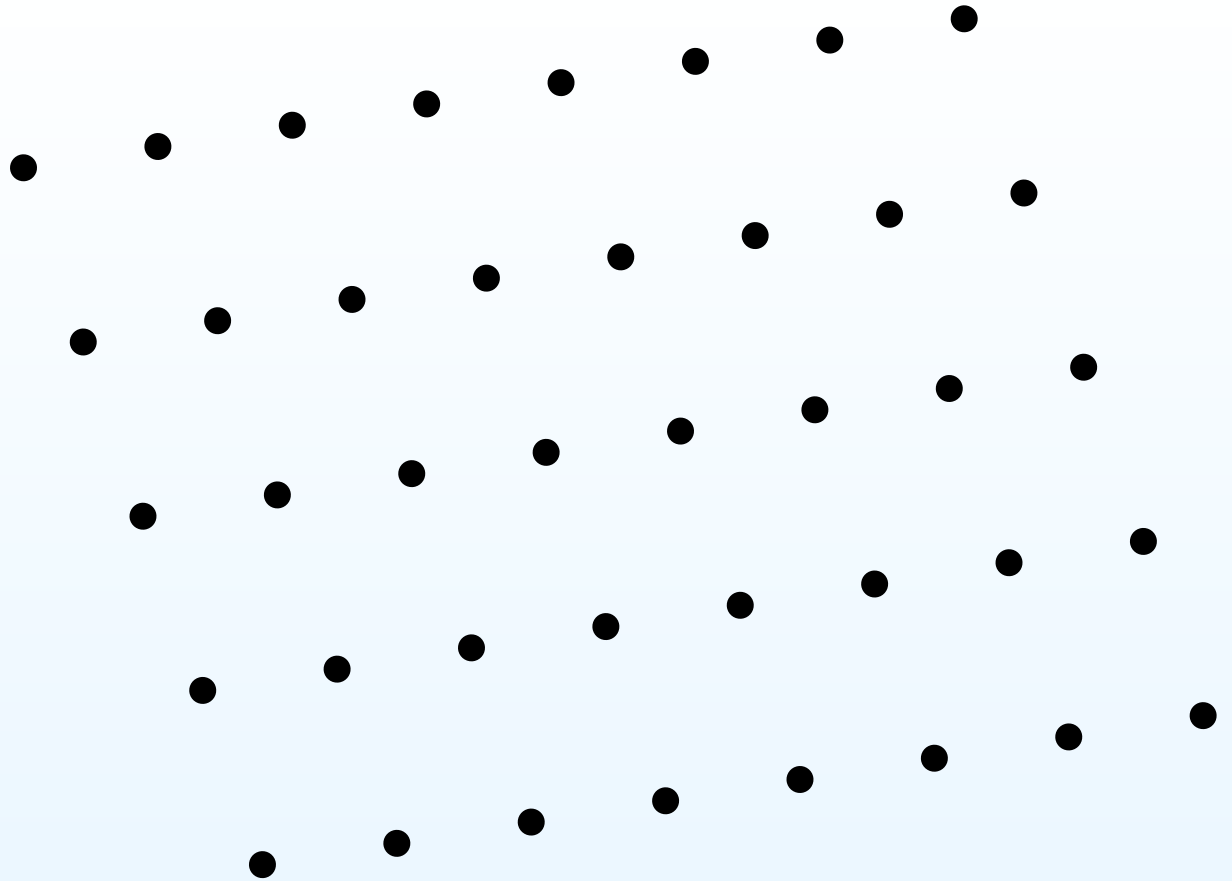
Au lieu d'un seul réseau entier on peut considérer une famille de tous les réseaux. On peut déformer continûment les réseaux.

Espace de réseaux



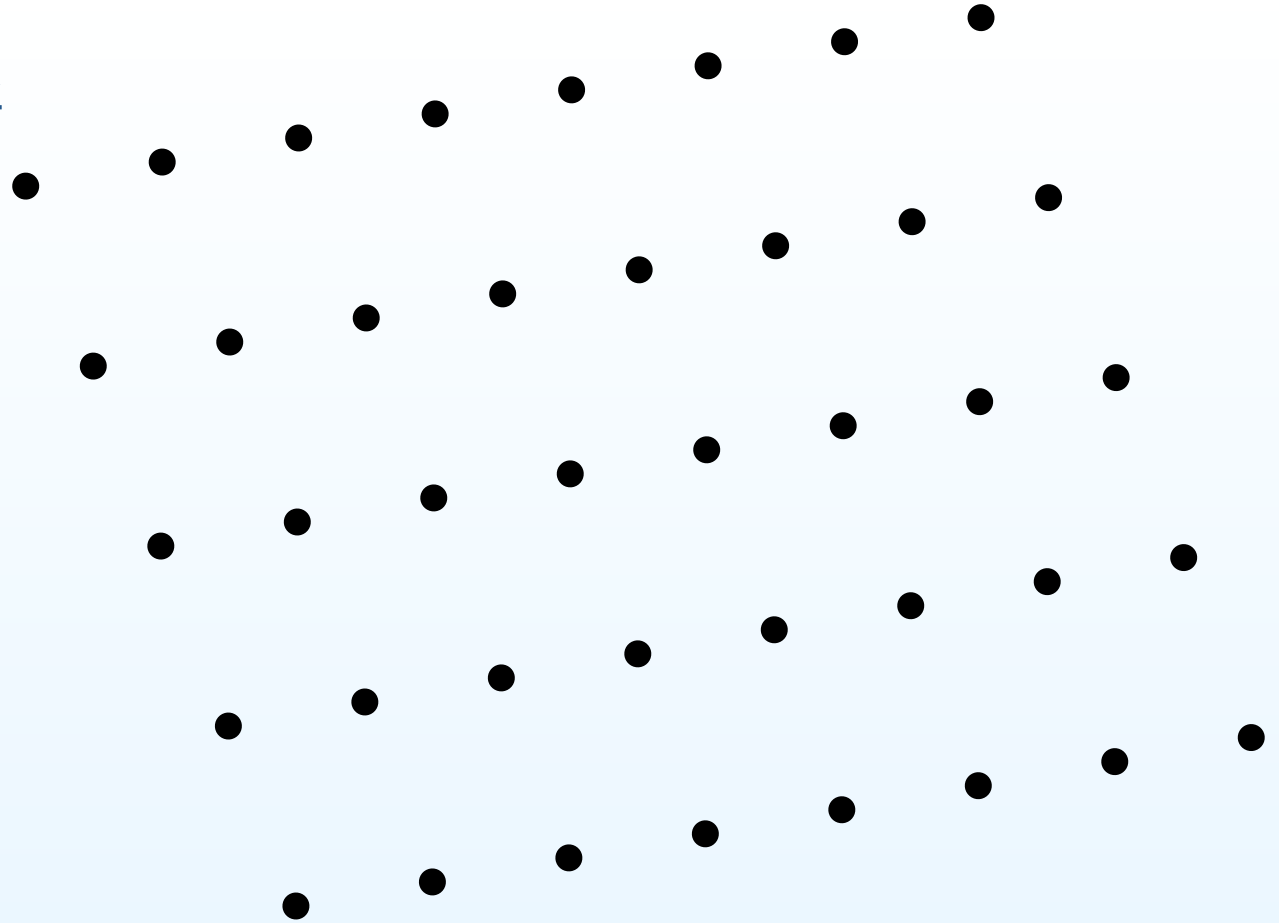
Au lieu d'un seul réseau entier on peut considérer une famille de tous les réseaux. On peut déformer continûment les réseaux.

Espace de réseaux



Au lieu d'un seul réseau entier on peut considérer une famille de tous les réseaux. On peut déformer continûment les réseaux.

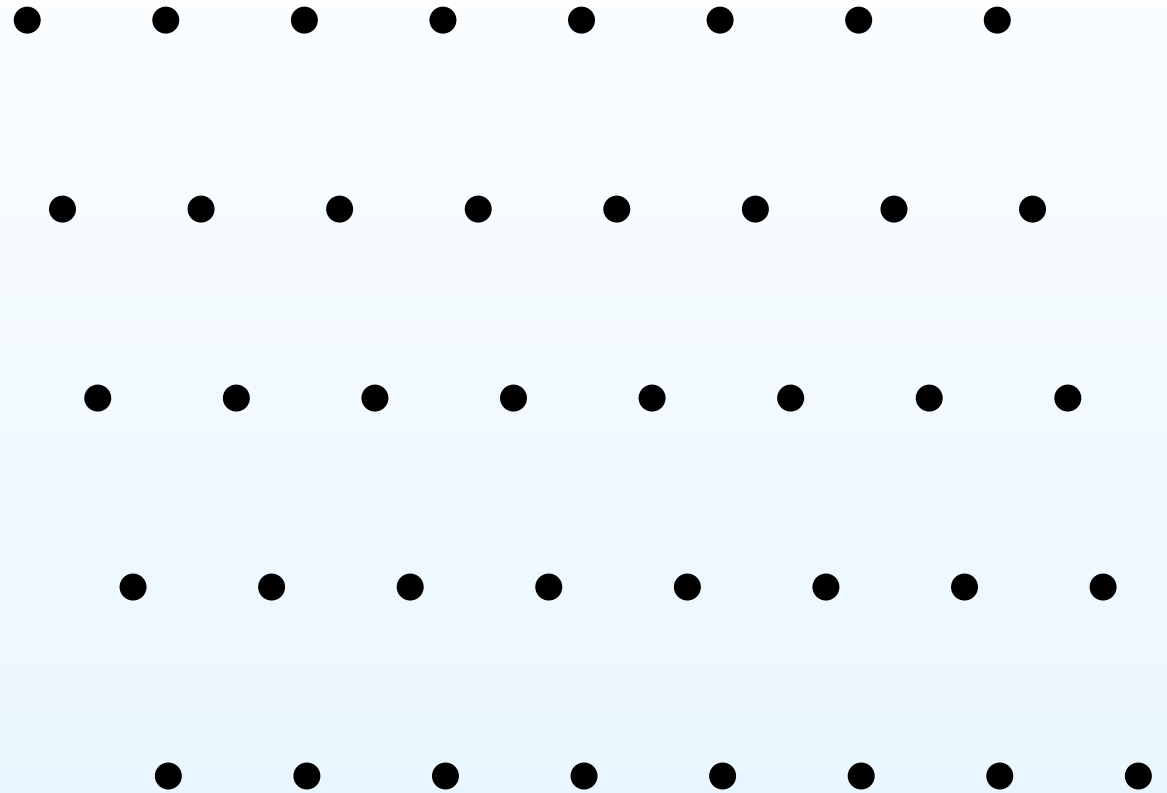
Espace de réseaux



Au lieu d'un seul réseau entier on peut considérer une famille de tous les réseaux. On peut déformer continûment les réseaux.

Si nous sommes seulement intéressés par les propriétés des "lignes droites" (géodésiques) sur les tores plats correspondants, alors on peut identifier les réseaux distingués par les rotations ou les similitudes.

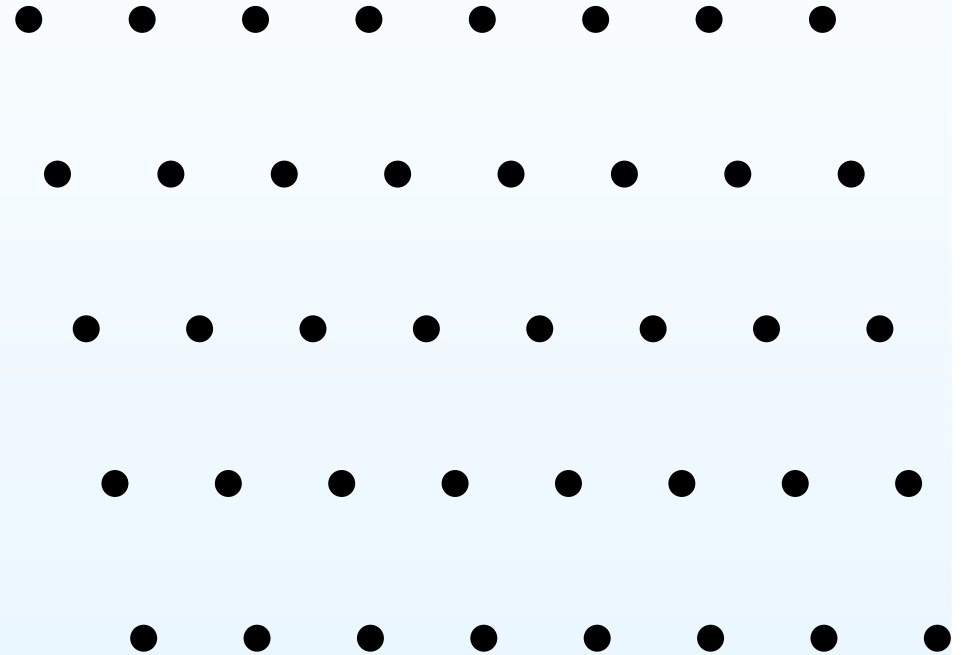
Espace de réseaux



Au lieu d'un seul réseau entier on peut considérer une famille de tous les réseaux. On peut déformer continûment les réseaux.

Si nous sommes seulement intéressés par les propriétés des "lignes droites" (géodésiques) sur les tores plats correspondants, alors on peut identifier les réseaux distingués par les rotations ou les similitudes.

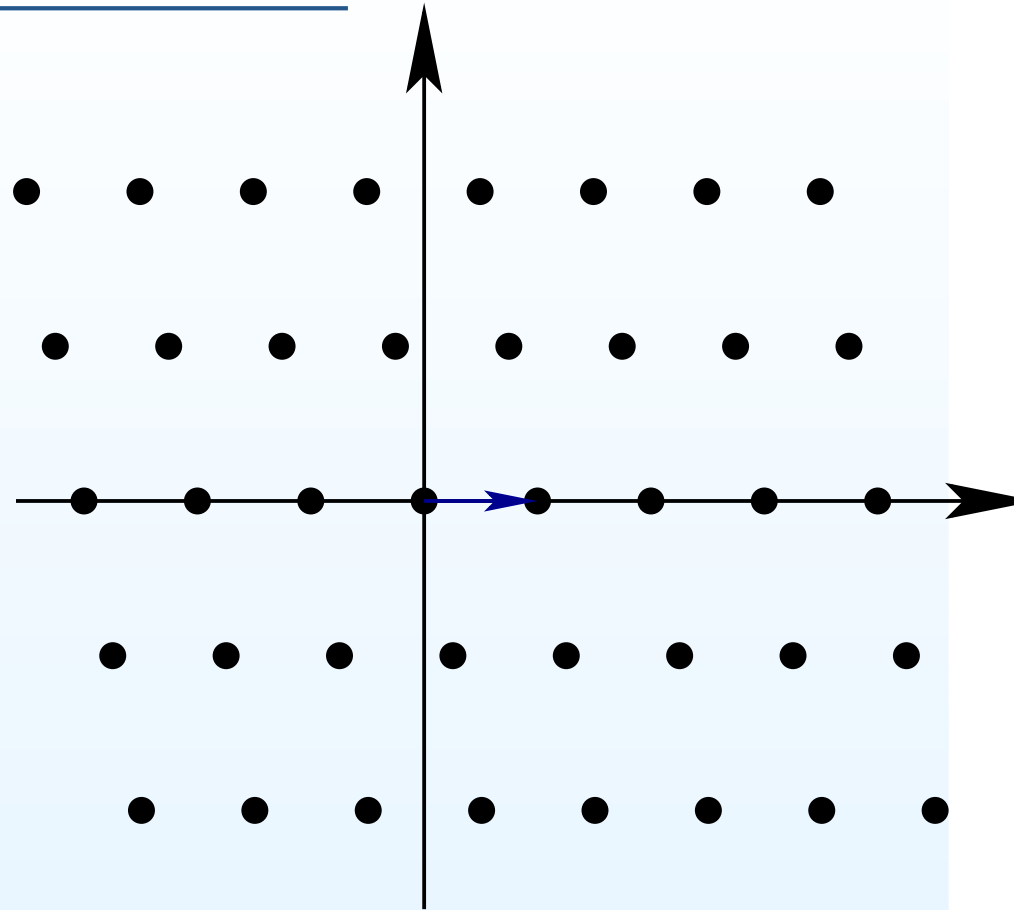
Espace de réseaux



Si nous sommes seulement intéressés par les propriétés des “lignes droites” (géodésiques) sur les tores plats correspondants, alors on peut identifier les réseaux distingués par les rotations ou les similitudes.

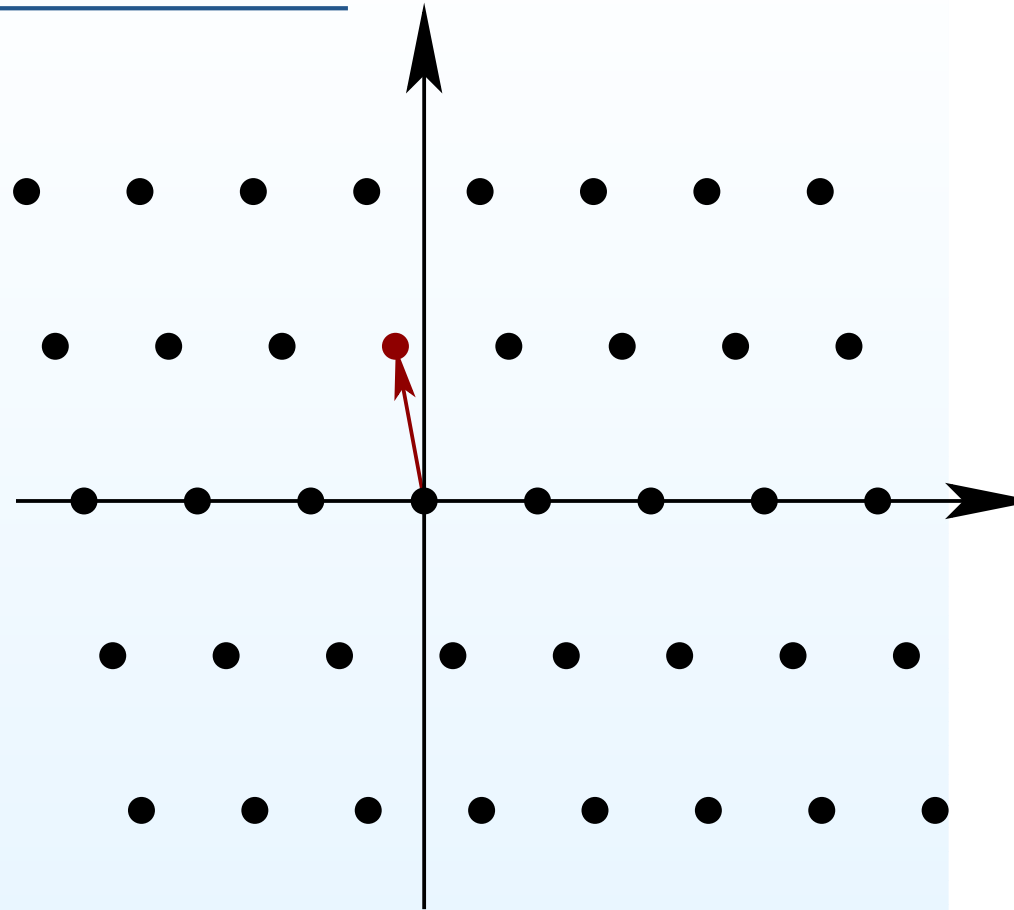
Espace de réseaux : domaine fondamental

- On va choisir la similitude et la rotation pour placer le vecteur le plus court du réseau en vecteur unitaire horizontal.



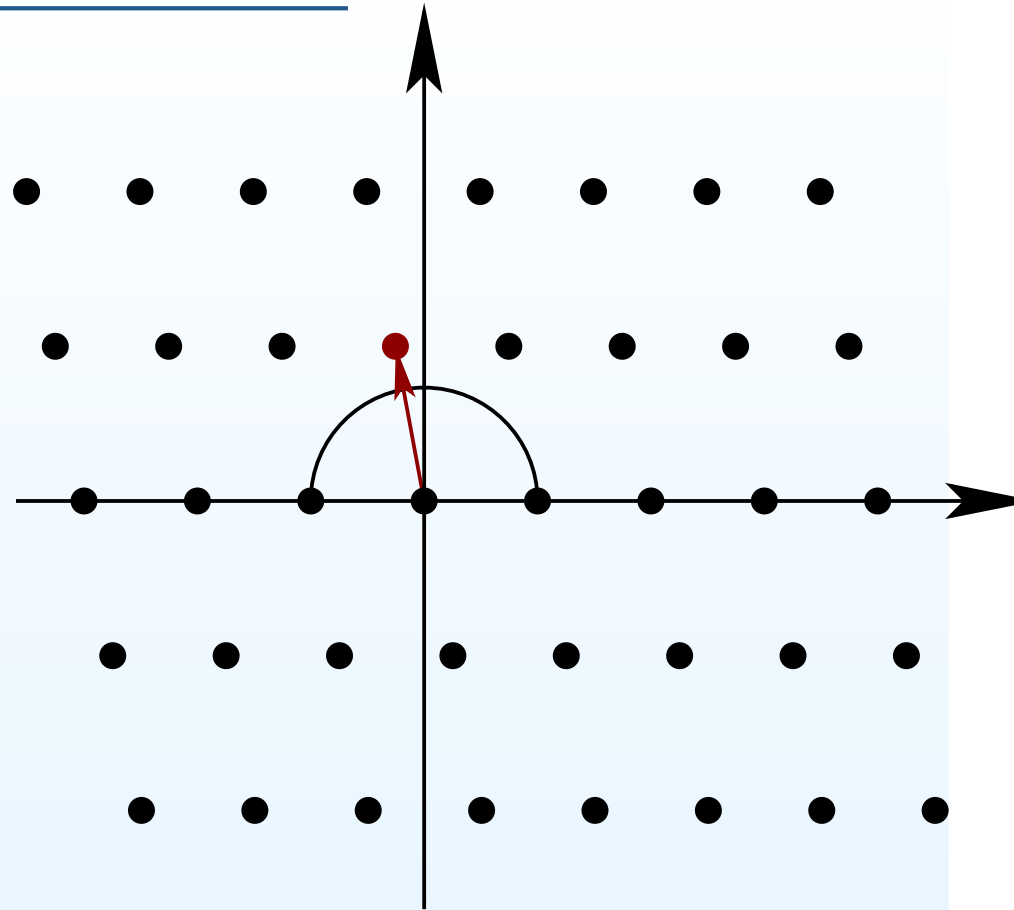
Espace de réseaux : domaine fondamental

- On va choisir la similitude et la rotation pour placer le vecteur le plus court du réseau en vecteur unitaire horizontal.
- Considérons un point du réseau le plus proche de l'origine parmi les points qui se trouvent dans le demi-plan strictement positif.



Espace de réseaux : domaine fondamental

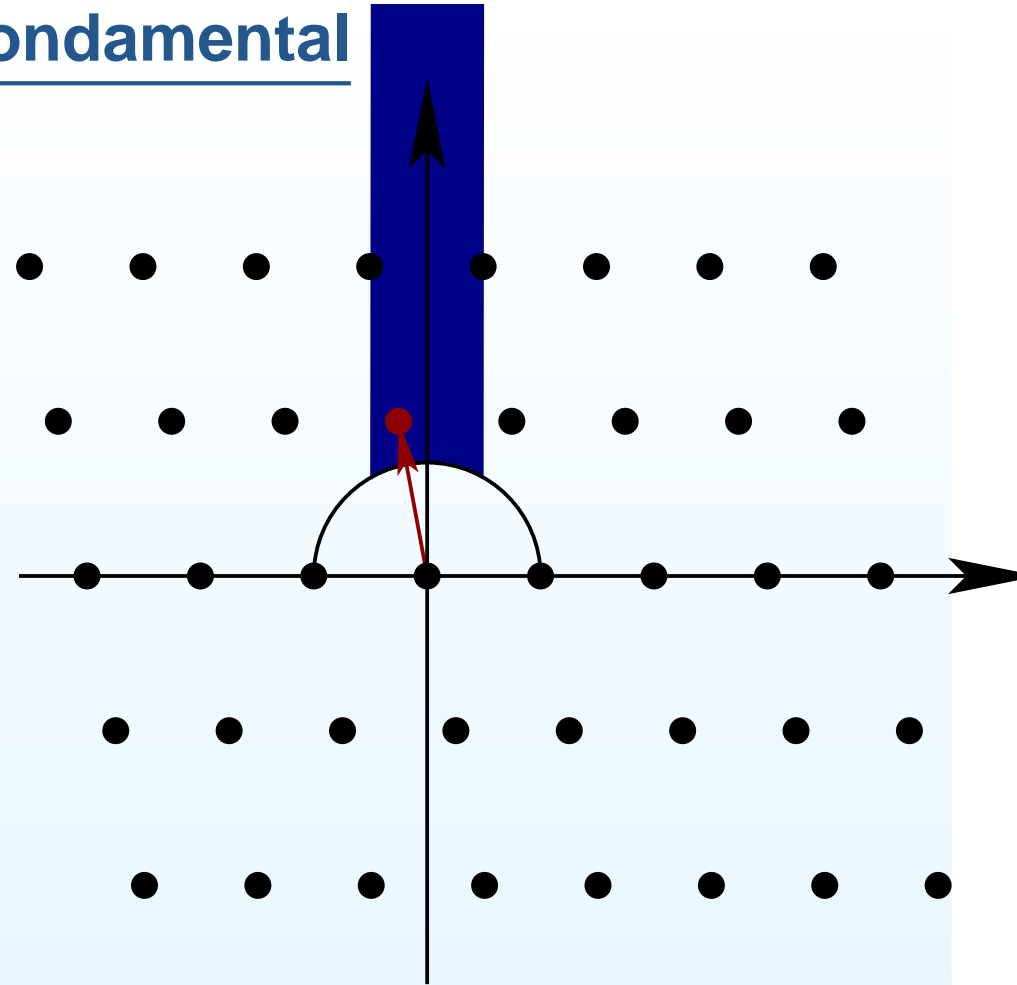
- On va choisir la similitude et la rotation pour placer le vecteur le plus court du réseau en vecteur unitaire horizontal.
- Considérons un point du réseau le plus proche de l'origine parmi les points qui se trouvent dans le demi-plan strictement positif.
- Ce point se trouve à l'extérieur du disque unitaire.



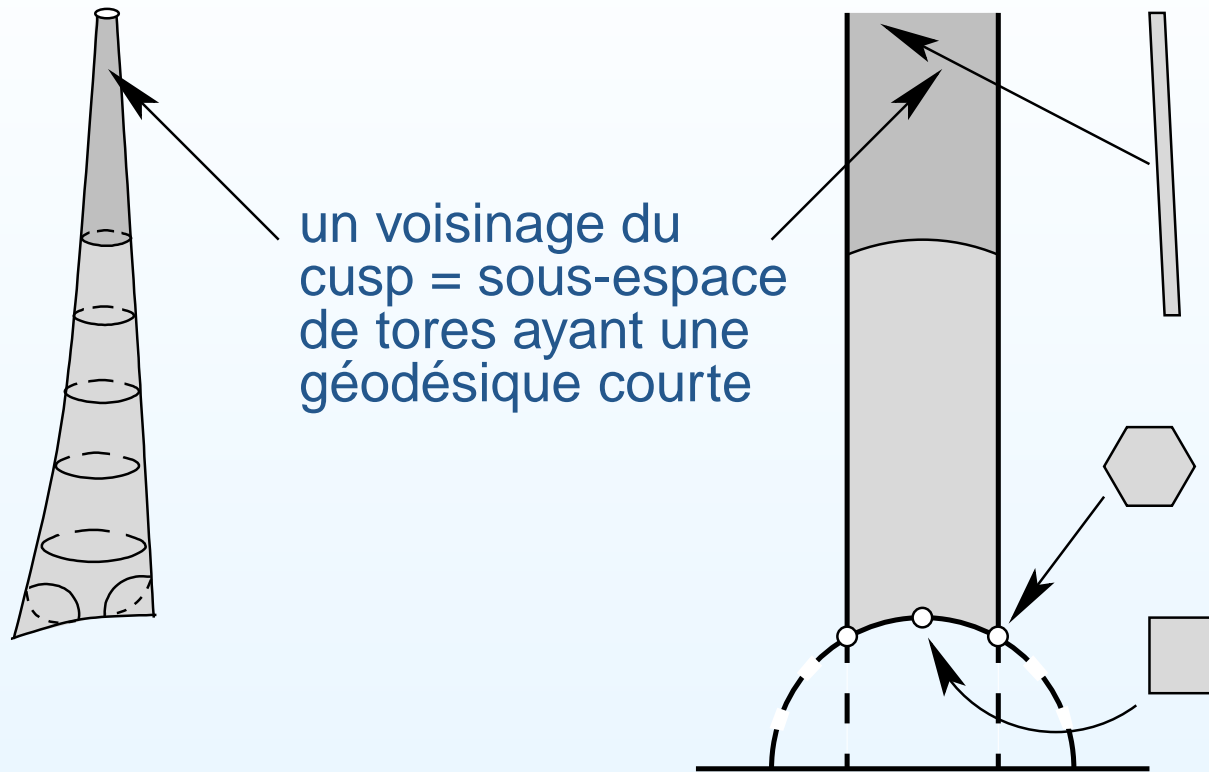
Espace de réseaux : domaine fondamental

- On va choisir la similitude et la rotation pour placer le vecteur le plus court du réseau en vecteur unitaire horizontal.
- Considérons un point du réseau le plus proche de l'origine parmi les points qui se trouvent dans le demi-plan strictement positif.
- Ce point se trouve à l'extérieur du disque unitaire.
- En outre, ce point se trouve à l'intérieur de la bande $-1/2 \leq x \leq 1/2$.

Exercice : Démontrer que les points intérieurs du domaine indiqué représentent des réseaux différents. Quels couples de points sur le bord du domaine représentent les mêmes réseaux ?



Espace de tores plats



La surface modulaire correspondante n'est pas compacte : les tores plats représentés par les points près du cusp sont presque dégénérés : ils sont très longs et très étroits.

Constante de Siegel–Veech : première apparition

C'est facile à démontrer que le nombre des points entiers primitifs dans un disque du grand rayon L est approximativement

$$N_{cg} \approx c \cdot \pi L^2 ,$$

où la valeur $c = \frac{1}{\zeta(2)} = \frac{6}{\pi^2}$ de la constante c peut être calculée comme

$$\begin{aligned} c &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \cdot \frac{\text{Vol}(\text{“Sous-ensemble des tores ayant une trajectoire } \varepsilon\text{-courte”})}{\text{Vol}(\text{Espace de tores plats d'aire un})} \\ &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \cdot \frac{\text{Vol}(\text{“}\varepsilon\text{-voisinage du cusp”})}{\text{Vol}(\text{Espace de tores plats d'aire un})} \end{aligned}$$

Des billards aux
surfaces plates

Surfaces très plates

- Relèvement des billards rationnels
- Bretzel plat
- Surfaces qui sont plus plates que les autres
- Surfaces très plates: une construction à partir d'un polygone
- Propriétés des surfaces très plates
- Singularité conique
- Familles de surfaces
- Forme volume
- Action du groupe
- Théorème de Masur—Veech

Surfaces à petits
carreaux

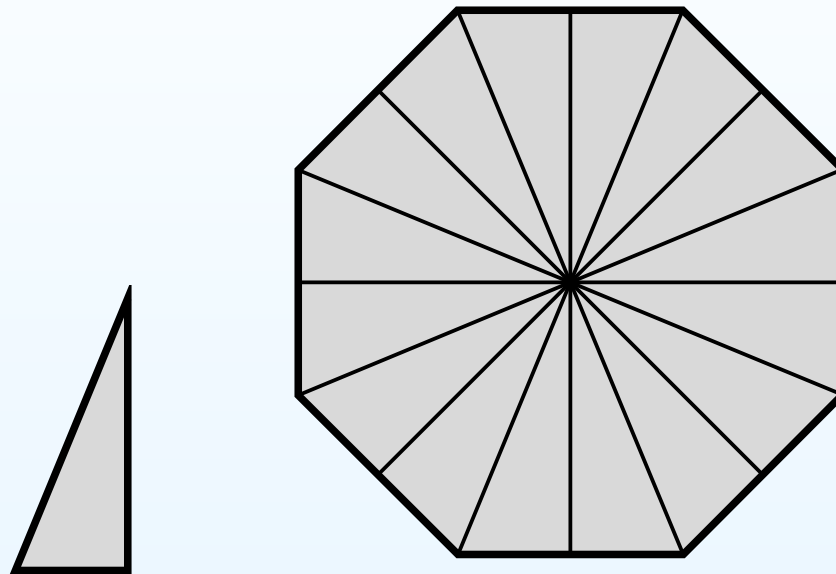
Comptage des
géodésiques fermées

Billards dans des
polygones
rectangulaires

Surfaces très plates

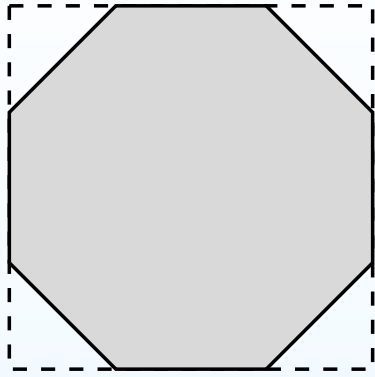
Relèvement des billards rationnels

Nous pouvons appliquer un procédé analogue à tout billard rationnel.



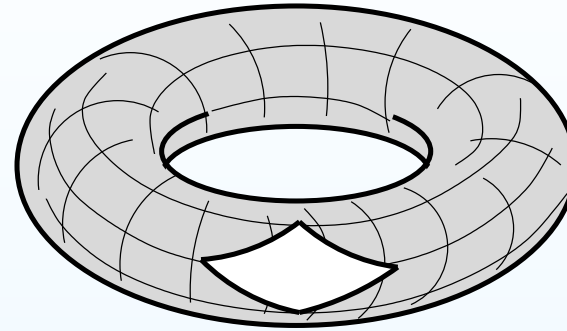
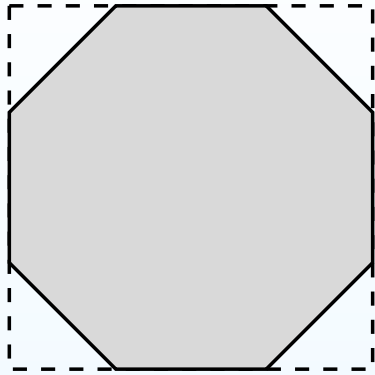
Considérons par exemple le triangle rectangle avec les angles $\pi/8, 3\pi/8, \pi/2$. Il est facile de vérifier qu'une trajectoire générique d'un billard dans un tel triangle contient 16 directions (au lieu de 4 pour le rectangle). En utilisant 16 copies on peut déplier notre triangle en octogone régulier.

Surface plate de genre 2.



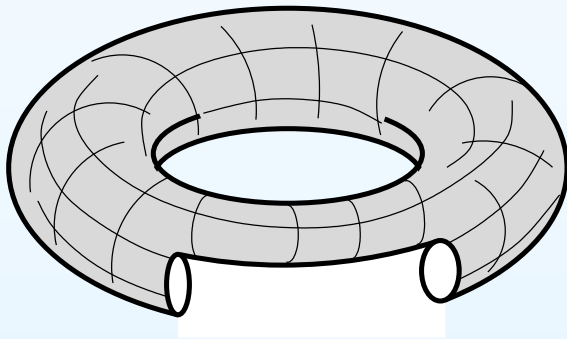
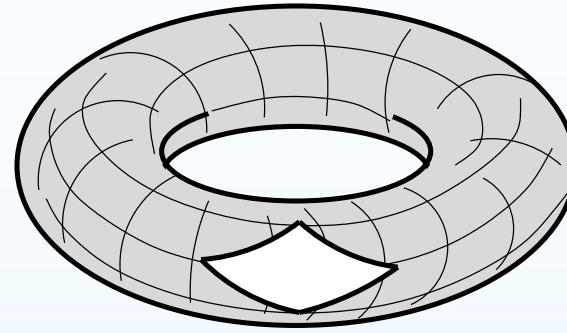
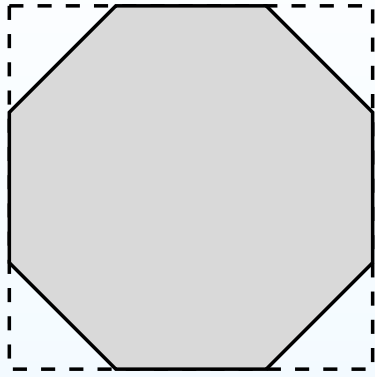
En identifiant les paires des côtés horizontaux puis les paires des côtés verticaux d'un octogone régulier nous obtenons un tore avec un trou carré. En identifiant deux côtés opposés du trou nous obtenons un tore avec deux trous distincts. En identifiant deux trous nous obtenons une surface plate de genre deux.

Surface plate de genre 2.



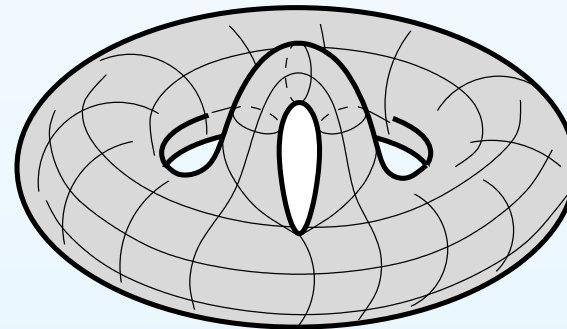
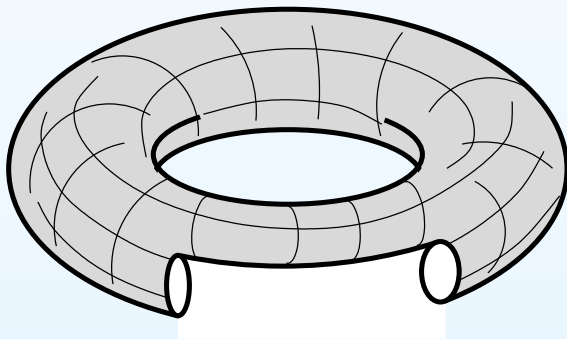
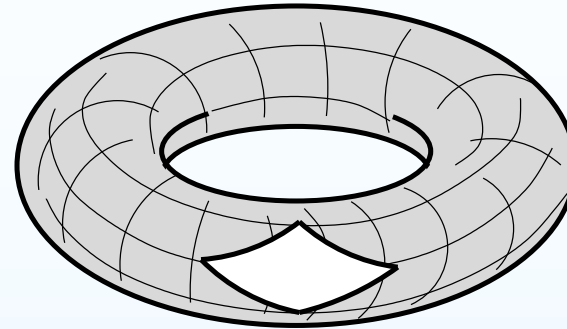
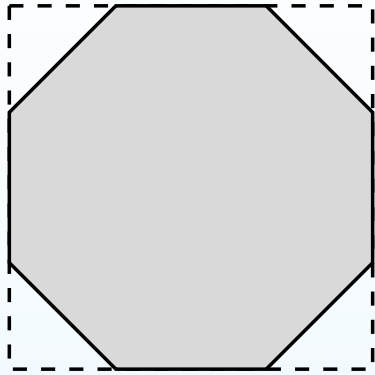
En identifiant les paires des côtés horizontaux puis les paires des côtés verticaux d'un octogone régulier nous obtenons un tore avec un trou carré. En identifiant deux côtés opposés du trou nous obtenons un tore avec deux trous distincts. En identifiant deux trous nous obtenons une surface plate de genre deux.

Surface plate de genre 2.



En identifiant les paires des côtés horizontaux puis les paires des côtés verticaux d'un octogone régulier nous obtenons un tore avec un trou carré. En identifiant deux côtés opposés du trou nous obtenons un tore avec deux trous distincts. En identifiant deux trous nous obtenons une surface plate de genre deux.

Surface plate de genre 2.



En identifiant les paires des côtés horizontaux puis les paires des côtés verticaux d'un octogone régulier nous obtenons un tore avec un trou carré. En identifiant deux côtés opposés du trou nous obtenons un tore avec deux trous distincts. En identifiant deux trous nous obtenons une surface plate de genre deux.

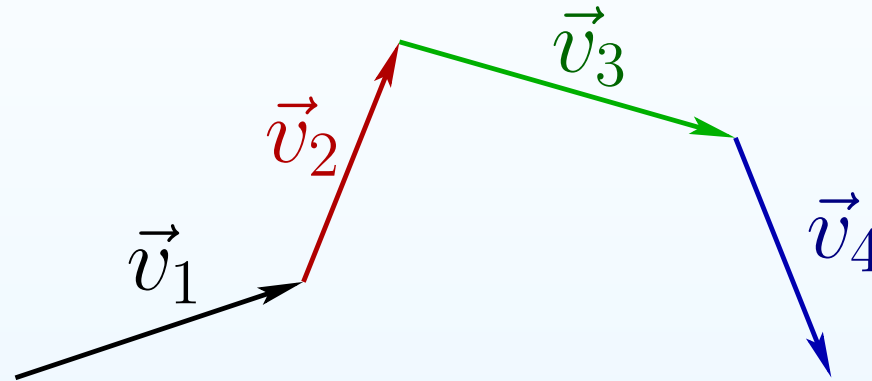
Surfaces qui sont plus plates que les autres

Notons que la métrique plate sur la surface obtenue a *une holonomie triviale*, car les côtés du polygone sont identifiés par des translations parallèles. Comme avant, une trajectoire de billard est relevée en une géodésique sur la surface. Cependant, maintenant les géodésiques ressemblent à des géodésiques sur un tore : elles n'ont pas d'auto-intersections !

Nous abandonnons les billards rationnels pour un certain temps et passons aux études plus systématiques des surfaces “*très plates*”.

Surfaces très plates : une construction à partir d'un polygone

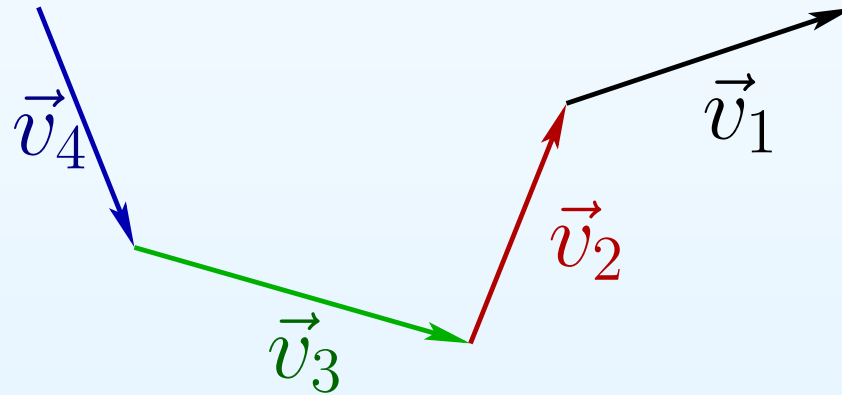
Considérons une ligne brisée composée de vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$.



et encore une ligne brisée composée des mêmes vecteurs pris dans un ordre différent.

Surfaces très plates : une construction à partir d'un polygone

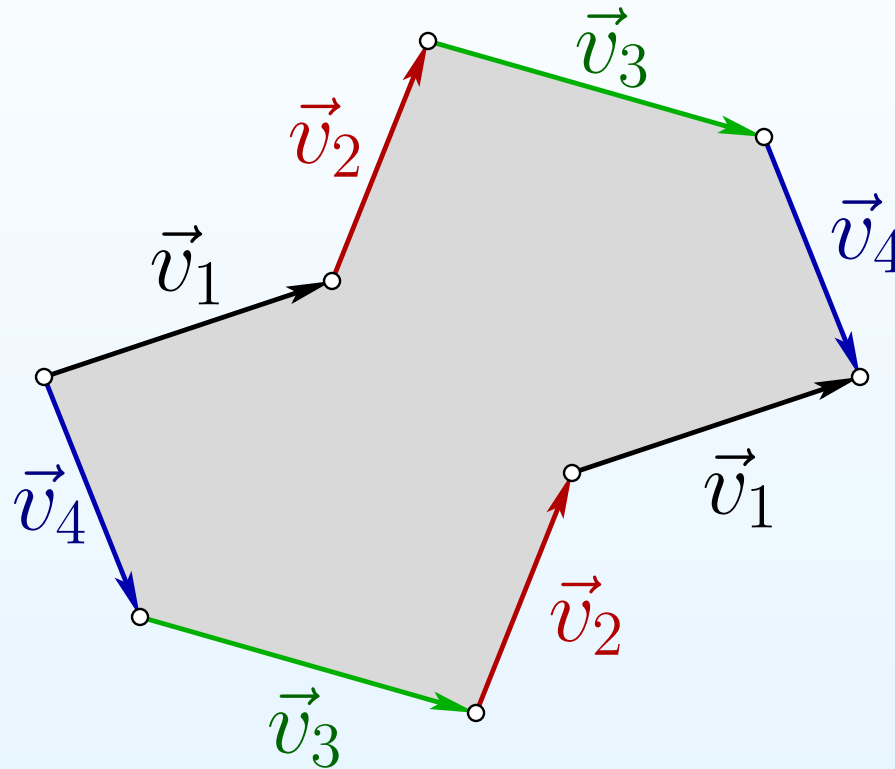
Considérons une ligne brisée composée de vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$.



et encore une ligne brisée composée des mêmes vecteurs pris dans un ordre différent.

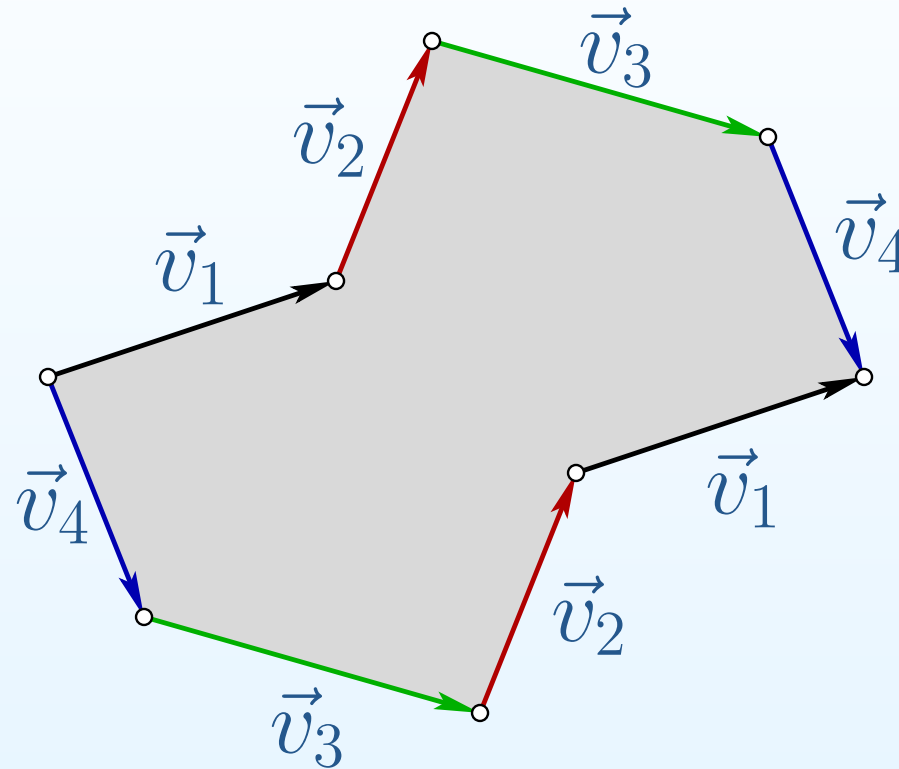
Surfaces très plates : une construction à partir d'un polygone

Considérons une ligne brisée composée de vecteurs $\vec{v}_1, \dots, \vec{v}_k$.



et encore une ligne brisée composée des mêmes vecteurs pris dans un ordre différent. Si nous avons de la chance, les deux lignes brisées ne s'intersectent pas et forment donc un polygone.

Surfaces très plates : une construction à partir d'un polygone



En identifiant les paires des côtés correspondants par des translations parallèles nous obtenons une surface fermée munie d'une métrique plate.

Propriétés des surfaces très plates

- La métrique plate est non singulière à l'extérieur d'un nombre fini de singularités coniques (héritées de sommets du polygone).
- La métrique plate a une holonomie triviale, c'est-à-dire le transport parallèle le long de tout chemin fermé ramène un vecteur tangent en lui-même.
- En particulier, tous les angles coniques sont des multiples entiers de 2π .

Par convention, le choix de la direction verticale (“direction au nord”) sera considéré comme une partie de la “structure très plate”.

Propriétés des surfaces très plates

- La métrique plate est non singulière à l'extérieur d'un nombre fini de singularités coniques (héritées de sommets du polygone).
- La métrique plate a une holonomie triviale, c'est-à-dire le transport parallèle le long de tout chemin fermé ramène un vecteur tangent en lui-même.
- En particulier, tous les angles coniques sont des multiples entiers de 2π .

Par convention, le choix de la direction verticale (“direction au nord”) sera considéré comme une partie de la “structure très plate”.

Propriétés des surfaces très plates

- La métrique plate est non singulière à l'extérieur d'un nombre fini de singularités coniques (héritées de sommets du polygone).
- La métrique plate a une holonomie triviale, c'est-à-dire le transport parallèle le long de tout chemin fermé ramène un vecteur tangent en lui-même.
- En particulier, tous les angles coniques sont des multiples entiers de 2π .

Par convention, le choix de la direction verticale (“direction au nord”) sera considéré comme une partie de la “structure très plate”.

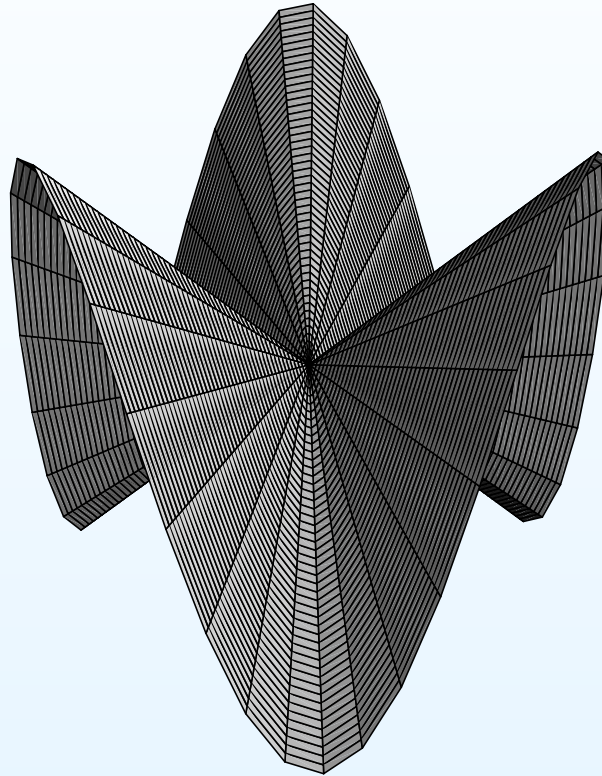
Propriétés des surfaces très plates

- La métrique plate est non singulière à l'extérieur d'un nombre fini de singularités coniques (héritées de sommets du polygone).
- La métrique plate a une holonomie triviale, c'est-à-dire le transport parallèle le long de tout chemin fermé ramène un vecteur tangent en lui-même.
- En particulier, tous les angles coniques sont des multiples entiers de 2π .

Par convention, le choix de la direction verticale (“direction au nord”) sera considéré comme une partie de la “structure très plate”.

Exemple : une singularité conique d'angle 6π

Le voisinage d'un point conique ressemble à une "selle de singe".



Nous pouvons bricoler un tel voisinage en utilisant six demi-disques.
Nous avons 3 directions distinctes sortant au nord d'un tel point.

Familles de surfaces plates

Le polygone dans notre construction dépend continûment des vecteurs \vec{v}_j . Ceci signifie que la géométrie combinatoire de la surface plate correspondante (son genre g , le nombre m et les types $2\pi(d_1 + 1), \dots, 2\pi(d_m + 1)$ des singularités coniques) ne change pas sous des petites déformations des vecteurs \vec{v}_j . Cela nous permet de considérer une surface plate comme élément d'une *famille* $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_m)$ des surfaces plates partageant une géométrie combinatoire commune.

Familles de surfaces plates

Le polygone dans notre construction dépend continûment des vecteurs \vec{v}_j . Ceci signifie que la géométrie combinatoire de la surface plate correspondante (son genre g , le nombre m et les types $2\pi(d_1 + 1), \dots, 2\pi(d_m + 1)$ des singularités coniques) ne change pas sous des petites déformations des vecteurs \vec{v}_j . Cela nous permet de considérer une surface plate comme élément d'une *famille* $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_m)$ des surfaces plates partageant une géométrie combinatoire commune.

Comme exemple d'une telle famille on peut considérer la famille des tores plats d'aire un. Cette famille peut être identifiée avec l'espace des réseaux :

$$\mathrm{SO}(2, \mathbb{R}) \backslash \mathrm{SL}(2, \mathbb{R}) / \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z}) = \mathbb{H}^2 / \mathrm{SL}(2, \mathbb{Z})$$

⟨Théorie de cordes⟩

Forme volume

Notons les vecteurs utilisés pour construire le patron polygonal d'une surface plate par $\vec{v}_1 = (x_1, y_1), \dots, \vec{v}_m = (x_m, y_m)$. On peut définir une *forme du volume* $d\nu = dx_1 dy_1 \cdots dx_m dy_m$ dans une famille de surfaces plates.

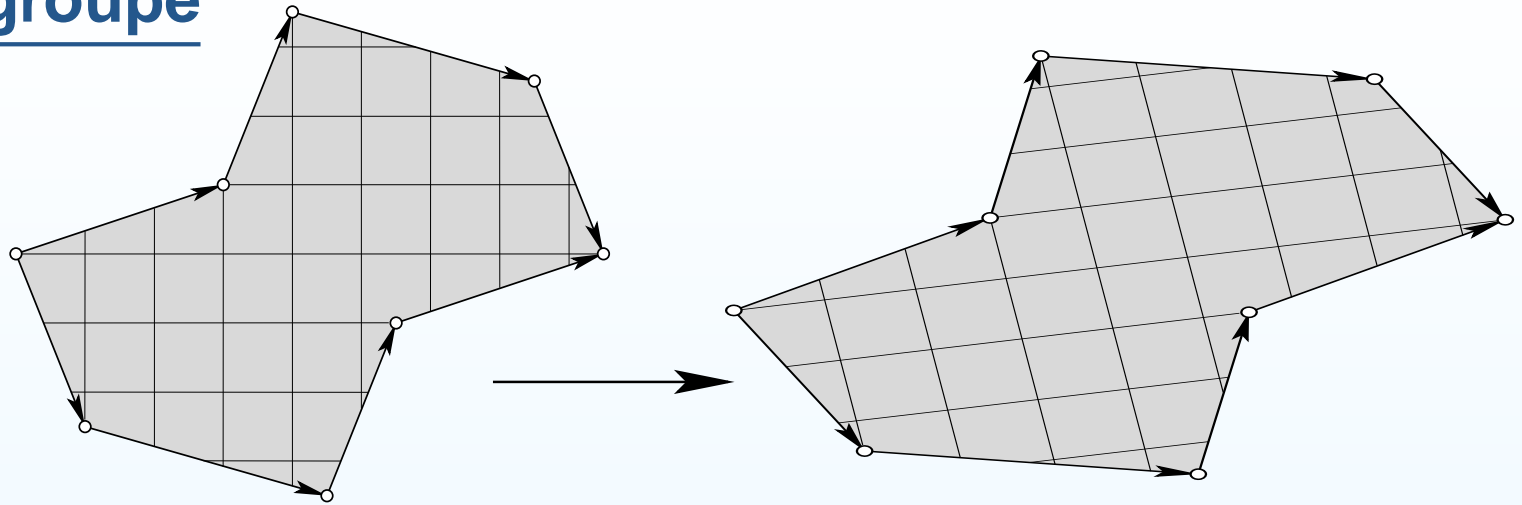
Lemme. *En choisissant un autre patron, on va obtenir la même forme volume.*

Considérons maintenant une hypersurface $\mathcal{H}_1(d_1, \dots, d_m) \subset \mathcal{H}(d_1, \dots, d_m)$ définie par l'équation $aire(S) = 1$. Nous pouvons restreindre la forme volume $d\nu$ à l'hypersurface en obtenant la forme volume $d\nu_1$ sur $\mathcal{H}_1(d_1, \dots, d_m)$.

Théorème (H. Masur ; W. A. Veech) *Le volume total $Vol(\mathcal{H}_1(d_1, \dots, d_m))$ de chaque strate est fini.*

Les valeurs de ces volumes ont été calculées par A. Eskin et A. Okounkov en utilisant les “surfaces à petits carreaux”.

Action du groupe



Le groupe $SL(2, \mathbb{R})$ de transformations linéaires agit sur l'hypersurface $\mathcal{H}_1(d_1, \dots, d_m)$.

Définition L'action du groupe est *ergodique* si chaque sous-espace invariant a soit une mesure pleine soit une mesure nulle.

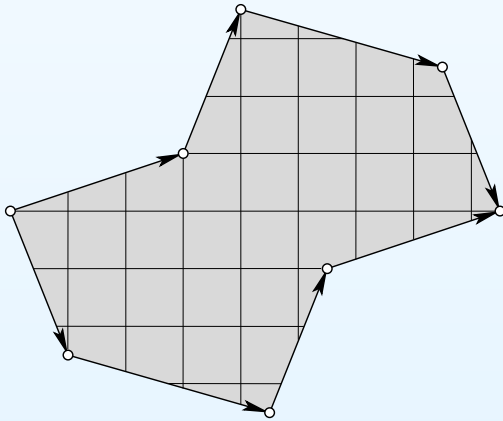
Théorème Clef (H. Masur ; W. A. Veech) *L'action de groupes*

$SL(2, \mathbb{R})$ et $\begin{pmatrix} e^t & 0 \\ 0 & e^{-t} \end{pmatrix}$ *préserve la mesure $d\nu_1$. Pour chaque*

composante connexe de chaque strate $\mathcal{H}_1(d_1, \dots, d_m)$ les deux actions sont ergodiques par rapport à cette mesure.

Théorème de Masur—Veech

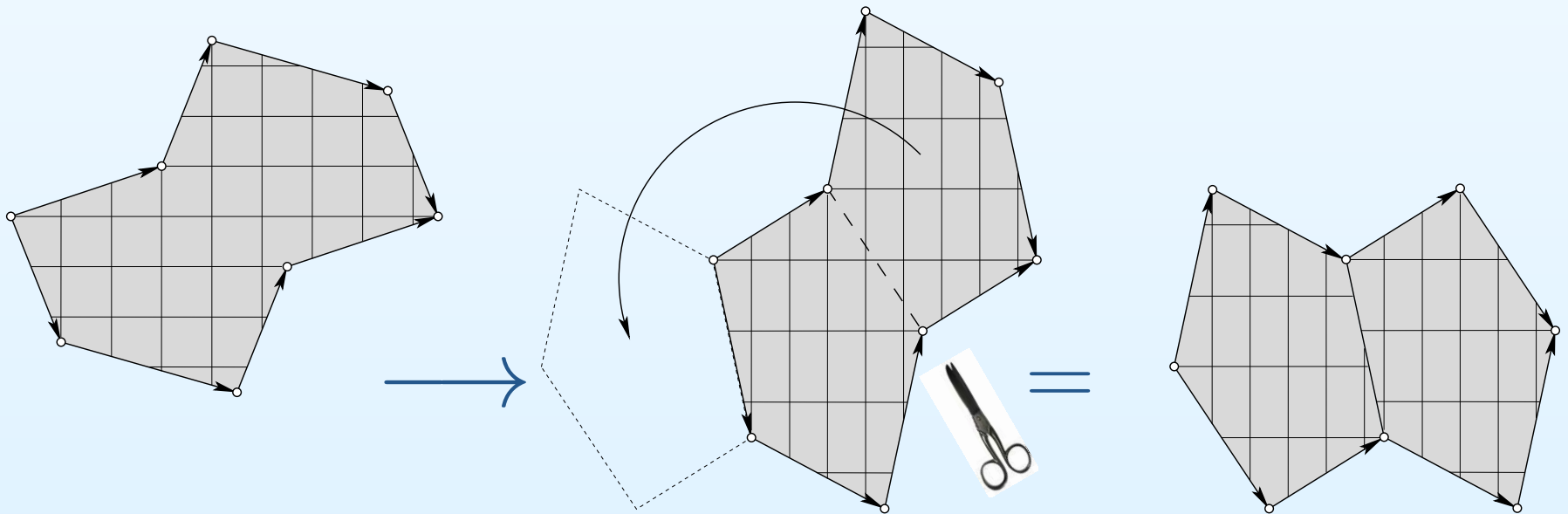
Ce théorème de Masur et Veech affirme qu'en partant de presque chaque octogone comme ci-dessous et en appliquant une dilatation par un facteur approprié dans la direction verticale et une contraction par le même facteur dans la direction horizontale nous allons arriver arbitrairement proche de chaque surface de la strate, par exemple de celle provenant d'un octogone régulier.



Théorème de Masur—Veech

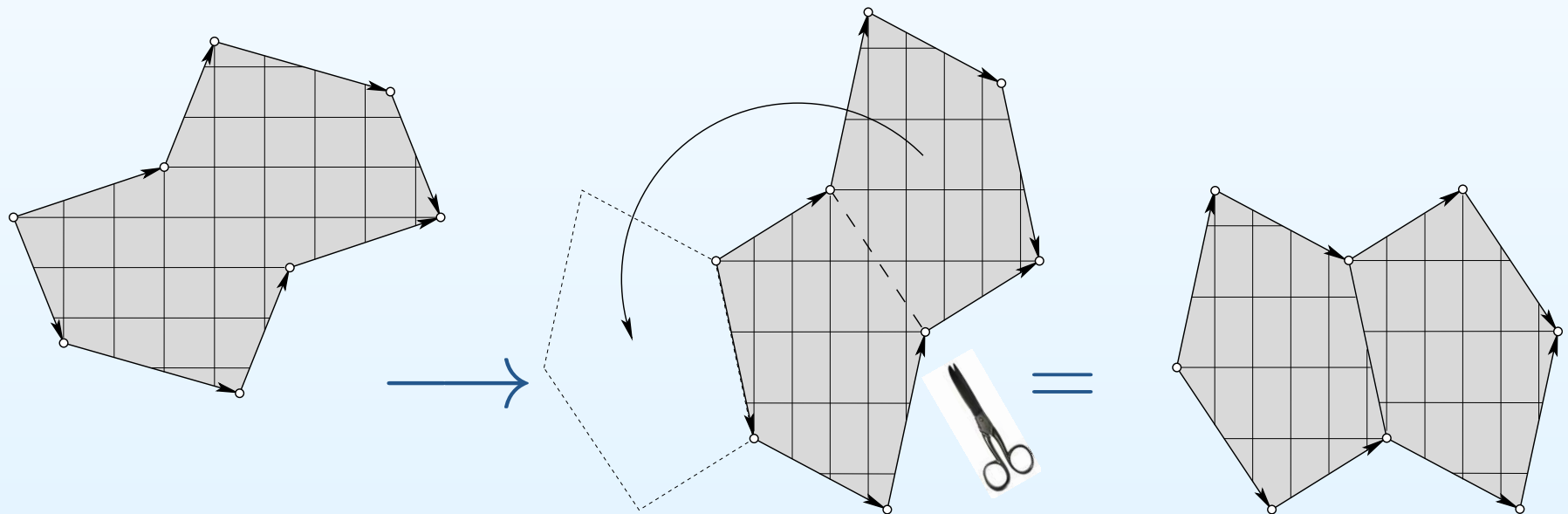
Ce théorème de Masur et Veech affirme qu'en partant de presque chaque octogone comme ci-dessous et en appliquant une dilatation par un facteur approprié dans la direction verticale et une contraction par le même facteur dans la direction horizontale nous allons arriver arbitrairement proche de chaque surface de la strate, par exemple de celle provenant d'un octogone régulier.

Il n'y a pas de contradiction car nous pouvons également découper et recoller notre octogone !



Théorème de Masur—Veech

Ce théorème de Masur et Veech affirme qu'en partant de presque chaque octogone comme ci-dessous et en appliquant une dilatation par un facteur approprié dans la direction verticale et une contraction par le même facteur dans la direction horizontale nous allons arriver arbitrairement proche de chaque surface de la strate, par exemple de celle provenant d'un octogone régulier.



La première modification du polygone change la structure plate tandis que la deuxième modification change seulement le dépliage de la surface.

Des billards aux
surfaces plates

Surfaces très plates

Surfaces à petits
carreaux

● Surfaces à petits
carreaux

Comptage des
géodésiques fermées

Billards dans des
polygones
rectangulaires

Surfaces à petits carreaux

Surfaces à petits carreaux

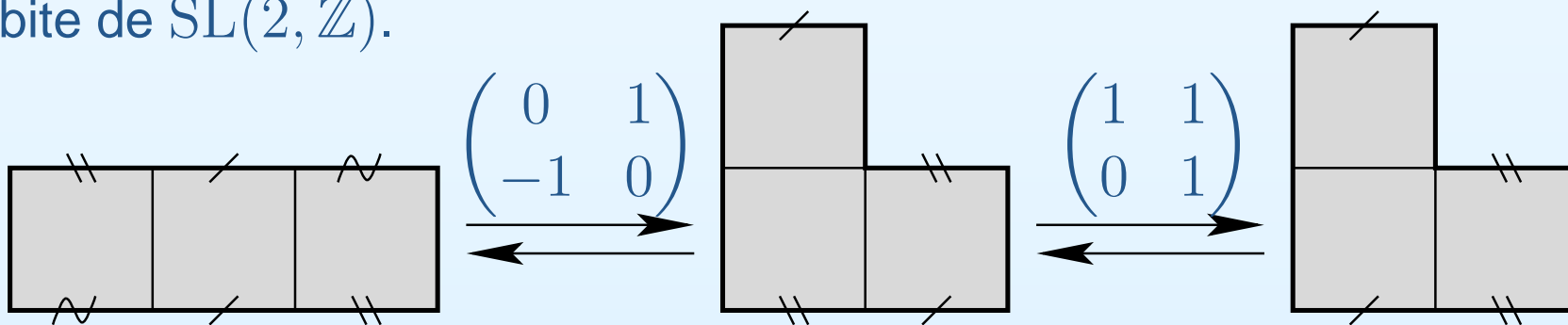
Les surfaces très plates collées de petits carreaux jouent le rôle de “points entiers” de l’espace $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_m)$. Par exemple, le nombre de tores fait d’au plus N carreaux est à peu près $\frac{\pi^2}{12} N^2$. Le nombre de surfaces avec un seul point conique d’angle 6π bricolé avec au plus N petits carreaux est approximativement $\frac{\pi^4}{980} N^4$ (famille $\mathcal{H}(2)$). Pour $\mathcal{H}(1, 1)$ ce nombre est $\frac{\pi^4}{2700} N^5$, etc.

Surfaces à petits carreaux

Les surfaces très plates collées de petits carreaux jouent le rôle de “points entiers” de l’espace $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_m)$. Par exemple, le nombre de tores fait d’au plus N carreaux est à peu près $\frac{\pi^2}{12} N^2$. Le nombre de surfaces avec un seul point conique d’angle 6π bricolé avec au plus N petits carreaux est approximativement $\frac{\pi^4}{980} N^4$ (famille $\mathcal{H}(2)$). Pour $\mathcal{H}(1, 1)$ ce nombre est $\frac{\pi^4}{2700} N^5$, etc.

Challenge. *Dire quelque chose de raisonnable concernant les $SL(2, \mathbb{Z})$ -orbites des surfaces à petits carreaux.*

Exemple Les trois surfaces à petits carreaux ci-dessous forment une orbite de $SL(2, \mathbb{Z})$.



2^{ARRT}

RUE DES
PETITS CARRÉAUX

Des billards aux
surfaces plates

Surfaces très plates

Surfaces à petits
carreaux

**Comptage des
géodésiques fermées**

- Comptage des géodésiques fermées
- Phénomène de multiplicité
- Constantes de Siegel–Veech

Billards dans des
polygones
rectangulaires

Comptage des géodésiques fermées

Comptage des géodésiques fermées

Comme dans le cas de tore, les “lignes droites” fermées régulières sur une surface plate apparaissent toujours en familles ; une telle famille remplit un cylindre maximal contenant de chaque côté au moins un point conique.

Comptage des géodésiques fermées

Comme dans le cas de tore, les “lignes droites” fermées régulières sur une surface plate apparaissent toujours en familles ; une telle famille remplit un cylindre maximal contenant de chaque côté au moins un point conique.

Soit $N_{cg}(S, L)$ le nombre de cylindres maximaux remplis de géodésiques régulières fermées de la longueur au plus L sur S .

Théorème (A. Eskin and H. Masur, 2001) *Pour presque toutes les surfaces plates S dans chaque famille $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_m)$*

$$N_{cg}(S, L) \sim c_{cg} \cdot \pi L^2$$

où la “constante de Siegel–Veech” c_{cg} dépend seulement de la composante connexe de la famille.

Comptage des géodésiques fermées

Comme dans le cas de tore, les “lignes droites” fermées régulières sur une surface plate apparaissent toujours en familles ; une telle famille remplit un cylindre maximal contenant de chaque côté au moins un point conique.

Soit $N_{cg}(S, L)$ le nombre de cylindres maximaux remplis de géodésiques régulières fermées de la longueur au plus L sur S .

Théorème (A. Eskin and H. Masur, 2001) *Pour presque toutes les surfaces plates S dans chaque famille $\mathcal{H}(d_1, \dots, d_m)$*

$$N_{cg}(S, L) \sim c_{cg} \cdot \pi L^2$$

où la “constante de Siegel–Veech” c_{cg} dépend seulement de la composante connexe de la famille.

Phénomène de multiplicité (image artistique)



Constantes de Siegel–Veech

Théorème (A. Eskin, H. Masur, A. Zorich) *Une constante c dans la formule asymptotique $N(S, L) \sim c \cdot \pi L^2$ pour le nombre de configurations de cylindres du type combinatoire \mathcal{C} de la longueur au plus L sur une surface plate S (appelée aussi la constante de Siegel–Veech) peut être décrite par la formule suivante :*

$$\begin{aligned} c(\mathcal{C}) &= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{\pi \varepsilon^2} \frac{\text{Vol}(\text{“}\varepsilon\text{-voisinage du cusp } \mathcal{C} \text{”})}{\text{Vol } \mathcal{H}_1^{\text{comp}}(\beta)} = \\ &= (\text{facteur combinatoire explicite}) \cdot \frac{\prod_{j=1}^k \text{Vol } \mathcal{H}_1(\beta'_k)}{\text{Vol } \mathcal{H}_1^{\text{comp}}(\beta)} \end{aligned}$$

Des billards aux
surfaces plates

Surfaces très plates

Surfaces à petits
carreaux

Comptage des
géodésiques fermées

Billards dans des
polygones
rectangulaires

- Billard sur une table en L
- Polygones rectangulaires
- Billards et différentielles quadratiques
- Nombre de diagonales généralisées
- L'intuition naïve ne sert pas...
- Joueurs de billard

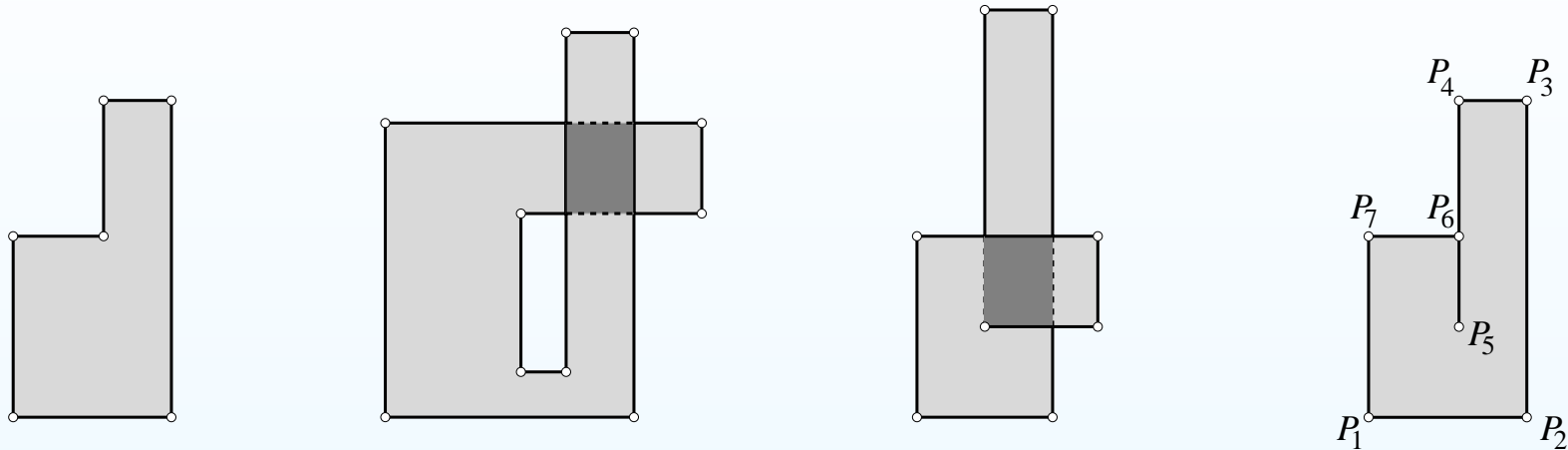
Billards dans des polygones rectangulaires (avec J. Athreya et A. Eskin)

Billard sur une table en L

Moon Duching
joue au billard



Polygones rectangulaires



Par un **polygone rectangulaire** Π on appelle un disque topologique muni d'une métrique plate, telle que le bord $\partial\Pi$ est représenté par une ligne brisée composée de segments droits et telle que l'angle entre chaque segments consécutifs est un multiple de $k\pi/2$, où $k \in \mathbb{N}$.

Billards dans des polygones rectangulaires et différentielles quadratiques sur $\mathbb{C}P^1$

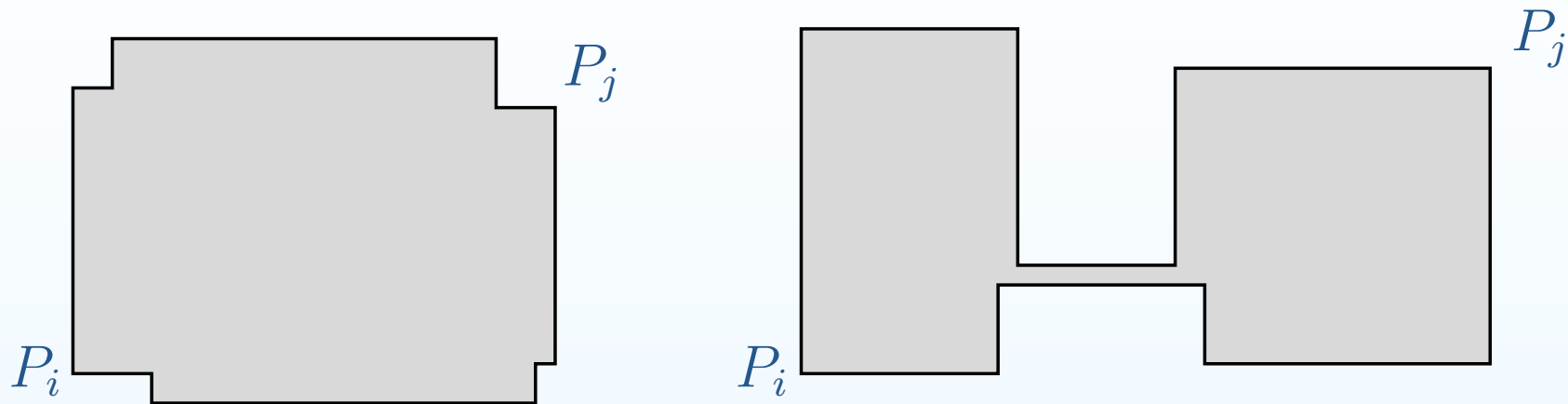
Nous voudrions compter les trajectoires de billard lancées d'un coin et arrivant dans un autre coin ainsi que compter les trajectoires fermées. Dans les deux cas nous comptons le nombre de trajectoires de longueur inférieure ou égale à L puis nous étudions l'asymptotique de ce nombre quand L tend vers l'infini.

Billards dans des polygones rectangulaires et différentielles quadratiques sur $\mathbb{C}P^1$

Nous voudrions compter les trajectoires de billard lancées d'un coin et arrivant dans un autre coin ainsi que compter les trajectoires fermées. Dans les deux cas nous comptons le nombre de trajectoires de longueur inférieure ou égale à L puis nous étudions l'asymptotique de ce nombre quand L tend vers l'infini.

Nous avons déjà constaté que deux copies du billard identifiées par les côtés donnent une "sphère plate". Donc pour compter les trajectoires du billard, nous pouvons compter les géodésiques ("lignes droites fermées") sur la sphère plate correspondante !

Nombre de diagonales généralisées

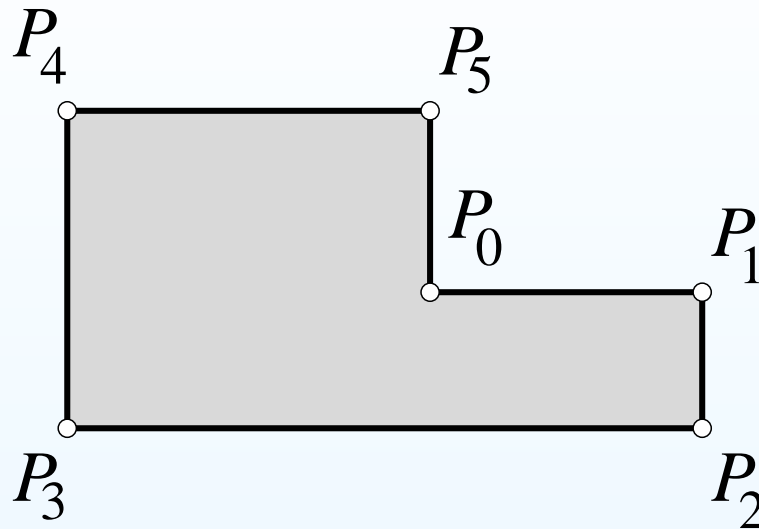


Nous pouvons démontrer que pour un polygone générique d'angles $\pi/2$ et $3\pi/2$ le nombre de trajectoires joignant deux angles droits est approximativement le même que pour un rectangle :

$$\frac{1}{2\pi} \cdot \frac{(\text{borne pour la longueur})^2}{\text{l'aire de la table}}$$

Ce nombre ne dépend pas de la forme de la table.

L'intuition naïve ne sert pas...



Pourtant, pour un polygone typique en L, le nombre de trajectoires joignant un angle droit fixé avec l'angle $3\pi/2$ est approximativement

$$\frac{2}{\pi} \cdot \frac{(\text{borne pour la longueur})^2}{\text{l'aire de la table}}$$

ce qui est 4 (au lieu de 3) fois plus grand que le nombre de trajectoires joignant deux angles droits.

Billards dans des polygones rectangulaires (image artistique)



Varvara Stepanova. Joueurs de billard. Musée Thyssen, Madrid