

NŒUDS ET ALGÈBRE(S)

MARIA CHLOUVERAKI

Université de Versailles St Quentin
Université Paris-Saclay



DIFFERENT TYPES OF KNOTS



overhand knot



figure of eight knot



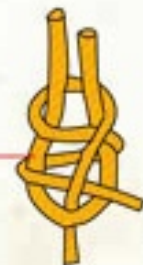
halyard knot



reef knot



sheet knot



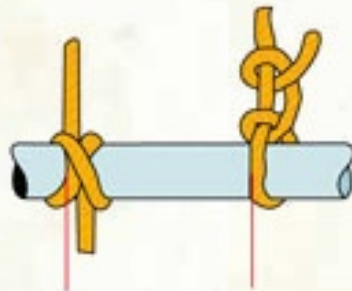
double sheet bend



bowline

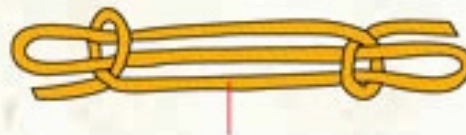


half-hitch

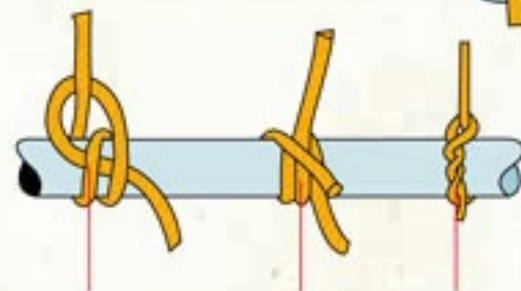


clove hitch

two half-hitches



sheep shank



studding sail

two round turns and a half-hitch

timber hitch

Problème d'enfants



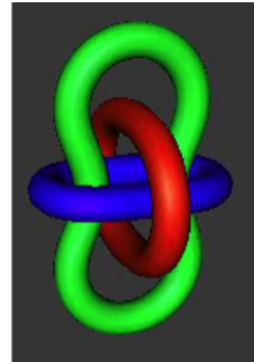
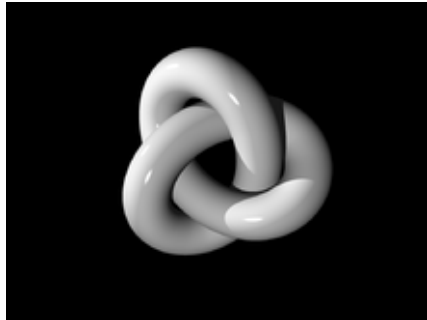
Problème d'adultes



Problème d'adultes
mathématiciens



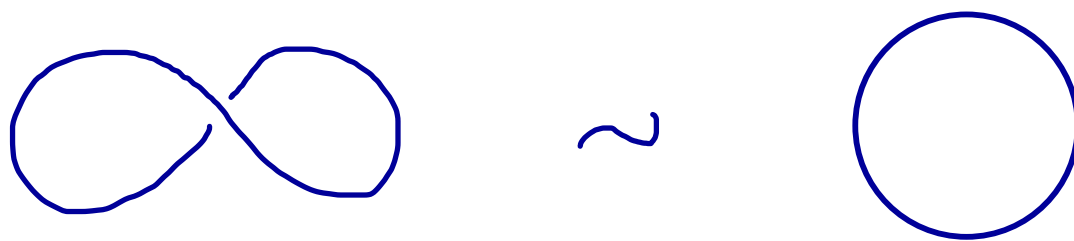
Un **noeud** (resp. un **entrelacs**) est un plongement du cercle S^1 (resp. n copies de S^1) dans l'espace euclidien \mathbb{R}^3 .



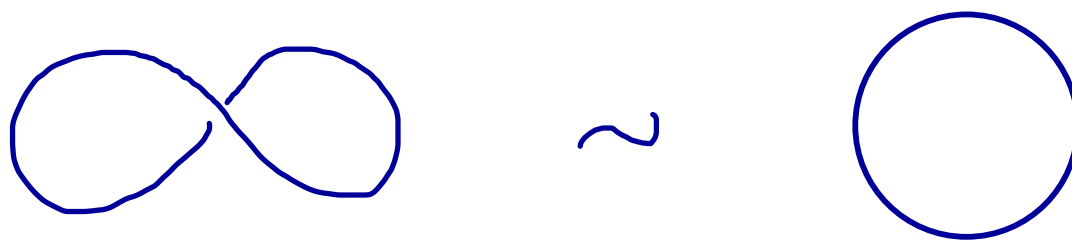
Tout noeud ou entrelac peut être représenté par un diagramme :



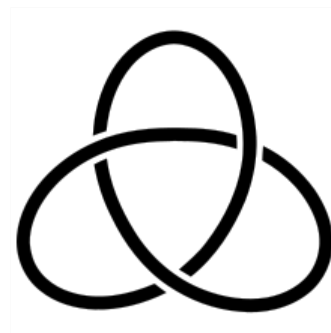
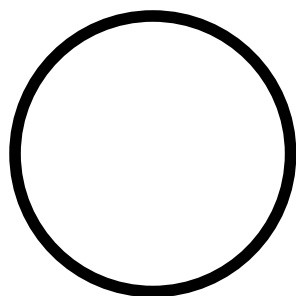
Deux noeuds (ou entrelacs) sont **équivalents** s'il existe une isotopie entre eux.



Deux noeuds (ou entrelacs) sont **équivalents** s'il existe une isotopie entre eux.



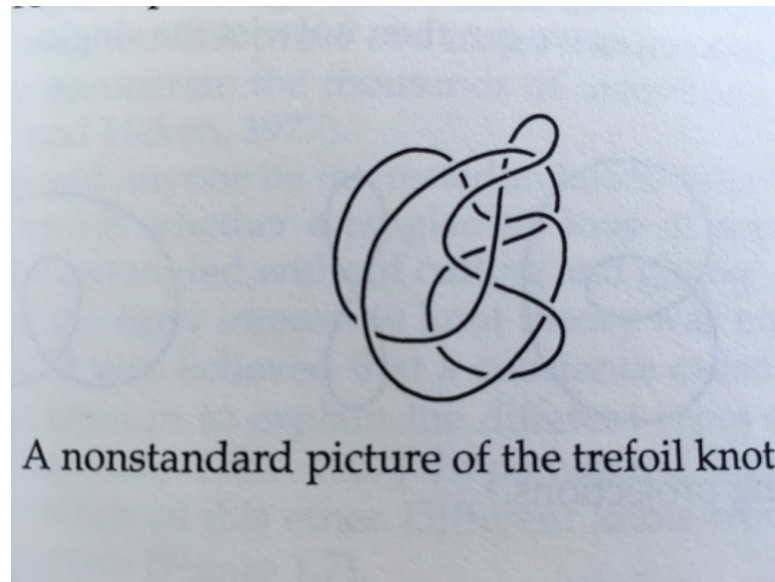
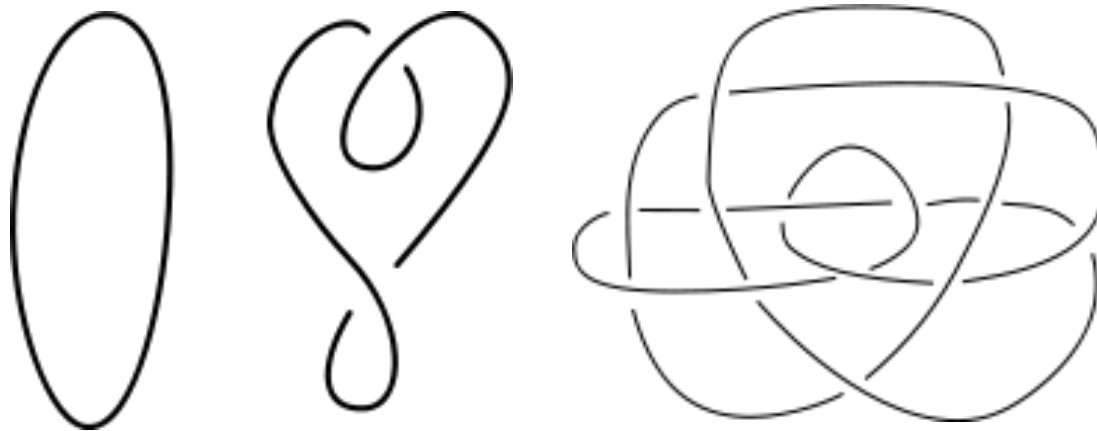
??

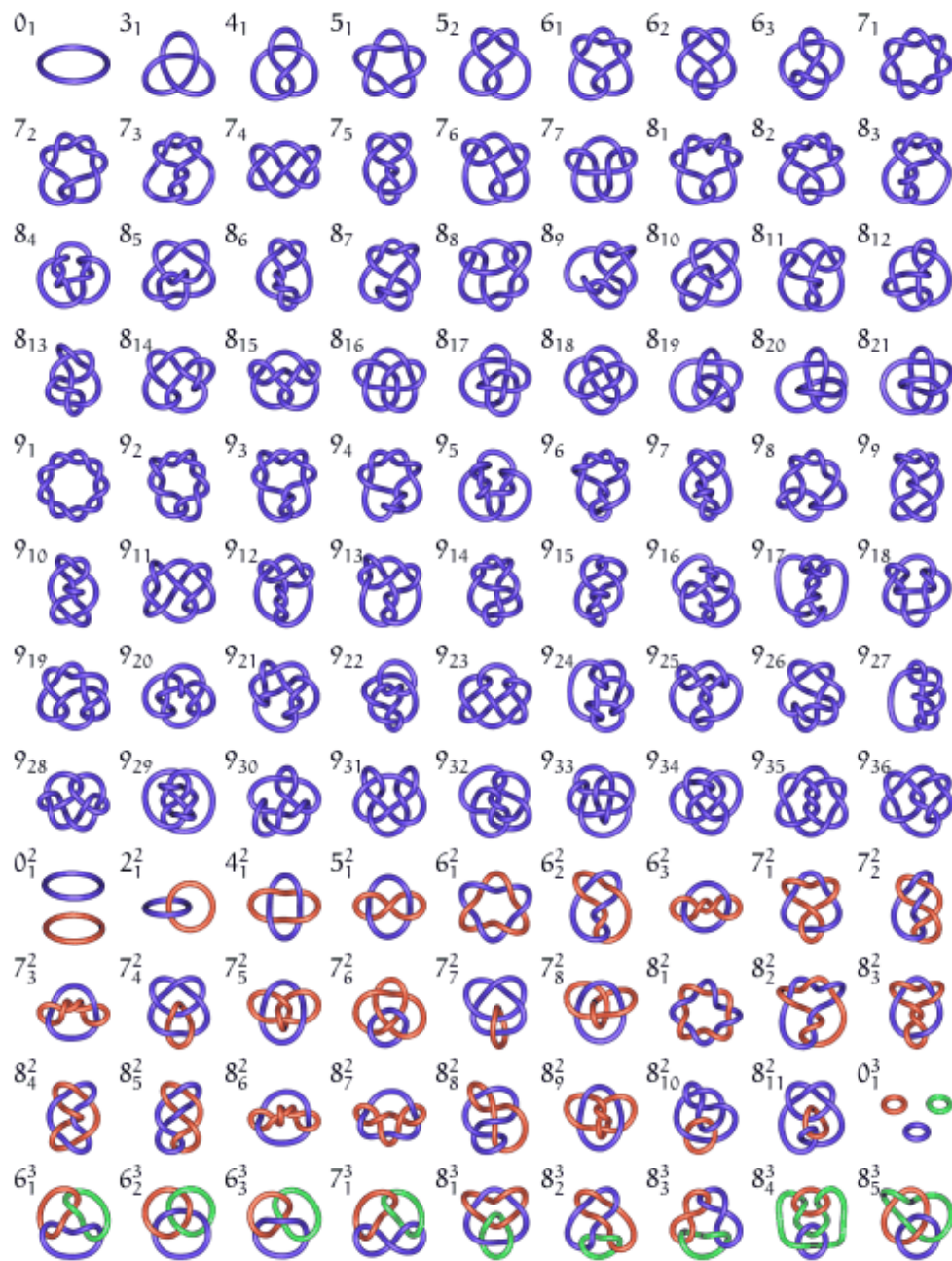


??



Q. Quand est-ce que 2 diagrammes représentent le même noeud ?

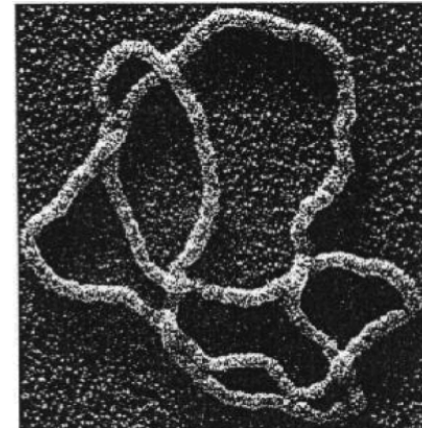
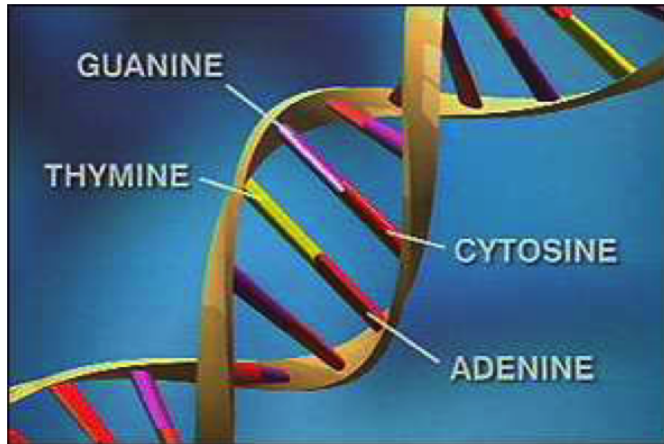




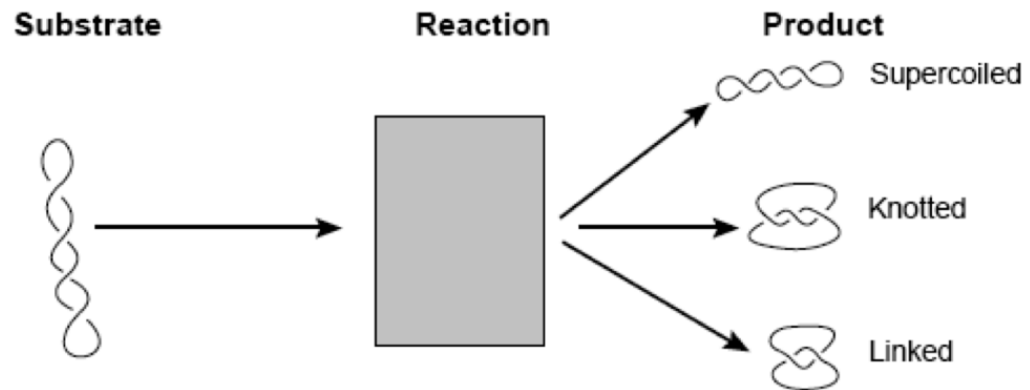
- Vandermonde (1735 - 1796) :
Importance des noeuds
- Gauss (1777 - 1855) :
Liste de 13 noeuds
Enlacement
- Lord Kelvin (1824 - 1907) :
"The atoms are knots in the aether"
- Tait (1839 - 1901) :
Tableau des noeuds avec au plus 10 croisements - 20 ans de travail !
- Aujourd'hui , plus que 6.000.000.000 noeuds et entrelacs sont connus.

Applications de la théorie des noeuds

1) ADN

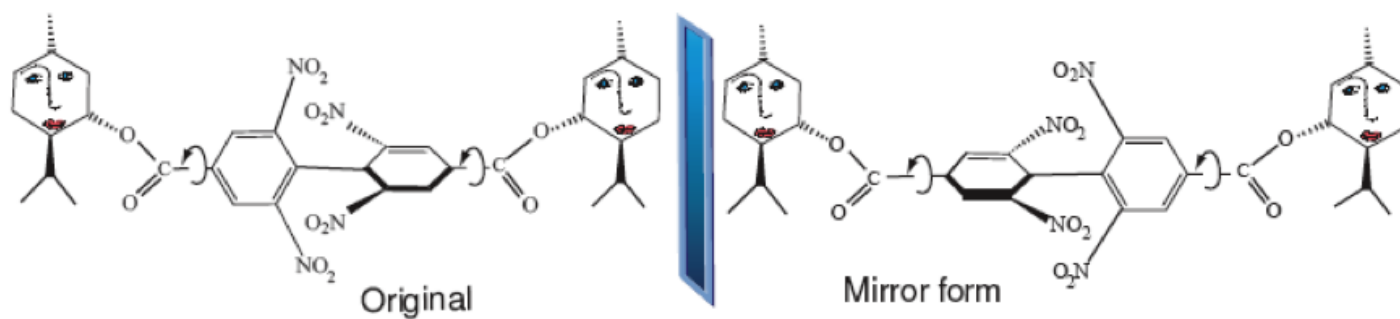
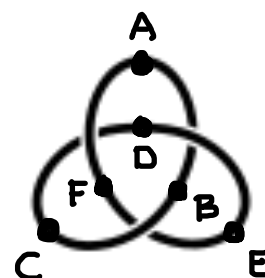
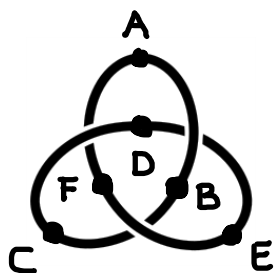
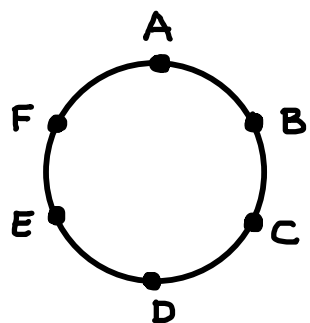


Action des enzymes



Applications de la théorie des noeuds

2) Chimie



Applications de la théorie des noeuds

3) Polymères

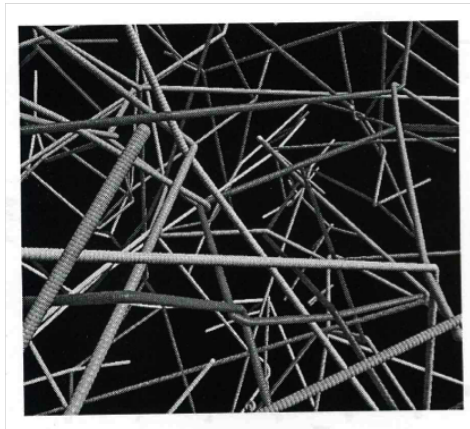
Topological Analysis of Linear Polymer Melts

Christos Tzoumanekas* and Doros N. Theodorou†

*Department of Materials Science and Engineering, School of Chemical Engineering,
National Technical University of Athens, Zografou Campus, 15780 Athens, Greece and
Dutch Polymer Institute (DPI), The Netherlands*

(Dated: 21st September 2005)

We introduce an algorithm for the reduction of computer generated atomistic polymer samples to networks of primitive paths. By examining network ensembles of Polyethylene and cis-1,4 Polybutadiene melts, we quantify the underlying topologies through the radial distribution function of entanglements and the distribution of the number of monomers between entanglements. A suitable scaling of acquired data leads to a unifying microscopic topological description of both melts.



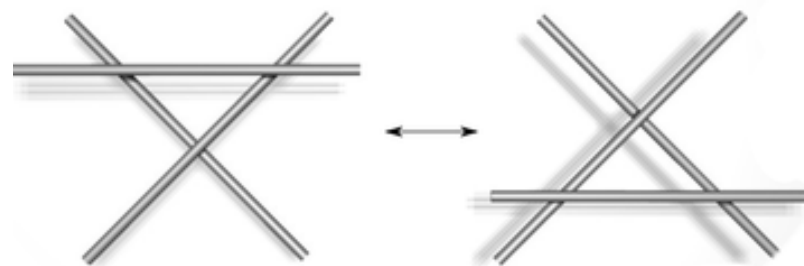
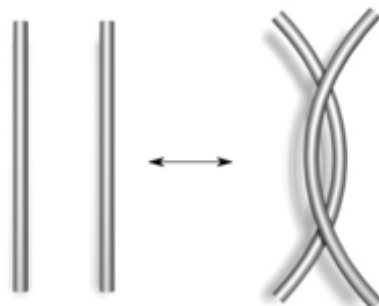
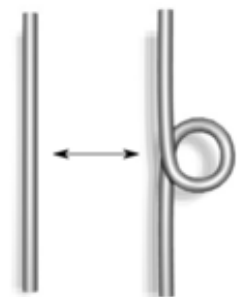
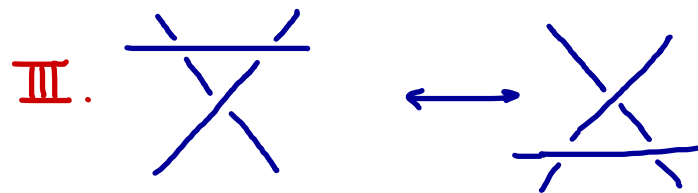
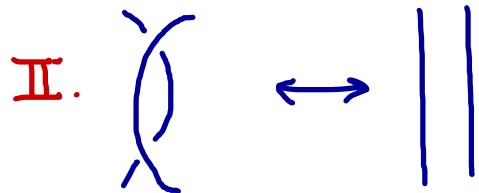
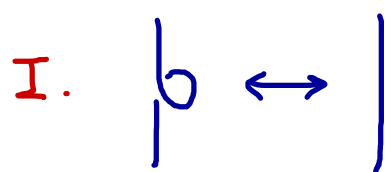
Applications de la théorie des noeuds

4) Mécanique statistique (e.g., Modèle de Potts)

5) Circuits électriques

6) Ordinateurs quantiques

Théorème (Reidemeister 1935) : Deux noeuds K_1, K_2 sont équivalents si et seulement si le diagramme de K_2 peut être obtenu du diagramme de K_1 via un nombre fini de mouvements suivants :



Si K_1, K_2 sont équivalents, nous écrivons $K_1 \sim K_2$.

\mathcal{L} = ensemble des noeuds ou entrelacs

S = un ensemble

Un invariant de noeuds est une fonction $I: \mathcal{L} \rightarrow S$ telle que

$$K_1 \sim K_2 \implies I(K_1) = I(K_2)$$

pour $K_1, K_2 \in \mathcal{L}$

\mathcal{L} = ensemble des noeuds ou entrelacs

S = un ensemble

Un **invariant de noeuds** est une fonction $I: \mathcal{L} \rightarrow S$ telle que

$$K_1 \sim K_2 \implies I(K_1) = I(K_2)$$

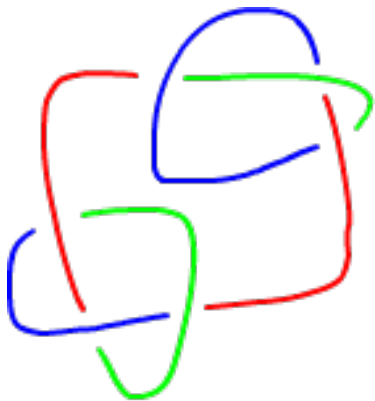
pour $K_1, K_2 \in \mathcal{L}$, i.e.,

$$I(K_1) \neq I(K_2) \implies K_1 \not\sim K_2$$

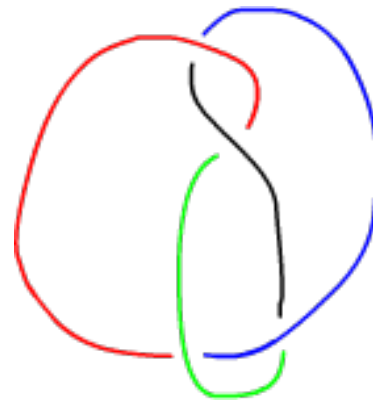
Tricolorabilité ($S = \{V, F\}$)

Un noeud est **tricolorable** si tout segment de son diagramme peut être coloré par une couleur parmi 3, sous les conditions suivantes :

- au moins 2 couleurs doivent être utilisées,
- à chaque croisement, les 3 segments qui se rencontrent ont soit le même couleur soit les 3 couleurs différentes.

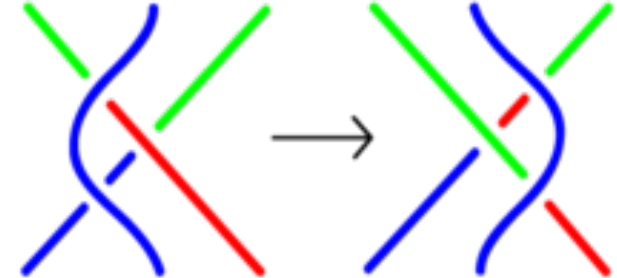
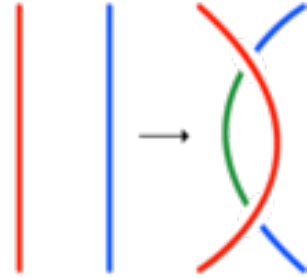
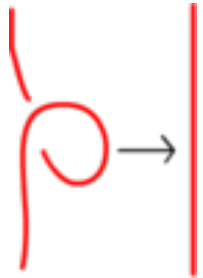


tricolorable (V)

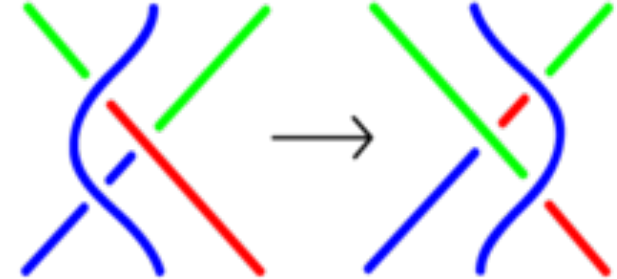
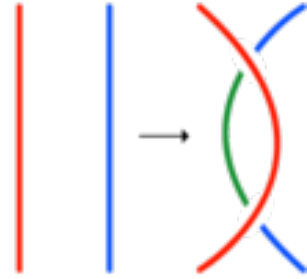
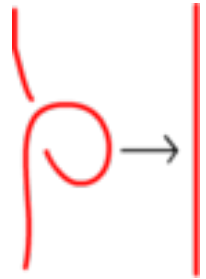


non-tricolorable (F)

La tricolorabilité est un invariant de noeuds , parce qu'elle est respectée par les mouvements de Reidemeister.



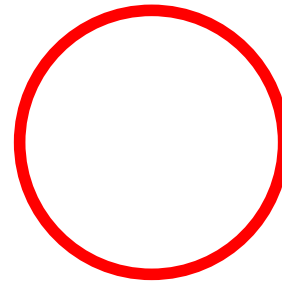
La tricolorabilité est un invariant de noeuds , parce qu'elle est respectée par les mouvements de Reidemeister.



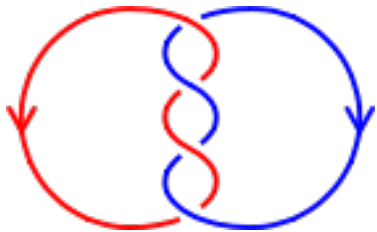
Exemple :



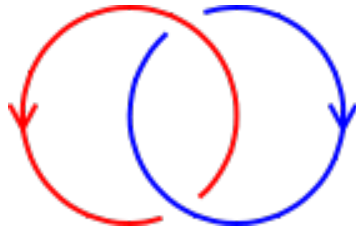
\approx



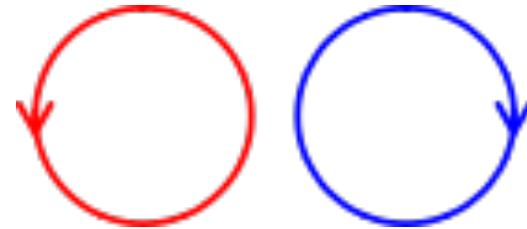
Enlacement ($S = \mathbb{Z}$)



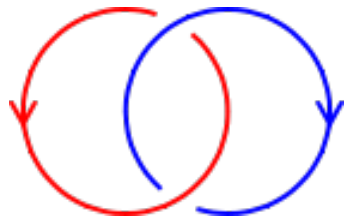
$$e = -2$$



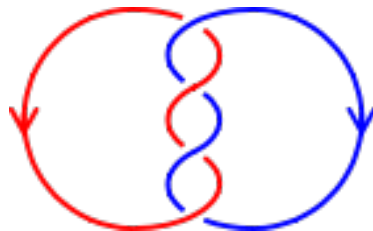
$$e = -1$$



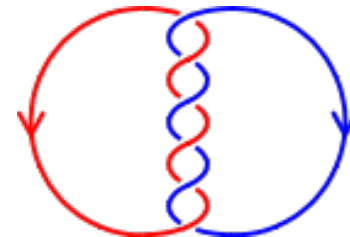
$$e = 0$$



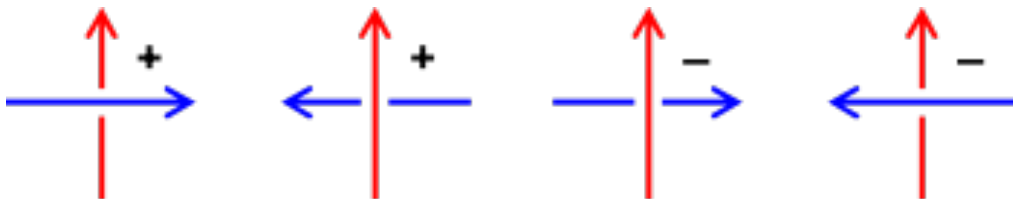
$$e = 1$$



$$e = 2$$



$$e = 3$$



$$e = \frac{n_1 + n_2 - n_3 - n_4}{2}$$

Invariants polynômiaux ($S = \mathbb{C}[X_1^{\pm 1}, X_2^{\pm 1}, \dots, X_r^{\pm 1}]$)

- Polynôme de Alexander (1927)
- Polynôme de Alexander - Conway (1969)



- Polynôme de Jones (1984)



- Polynôme de HOMFLY-PT

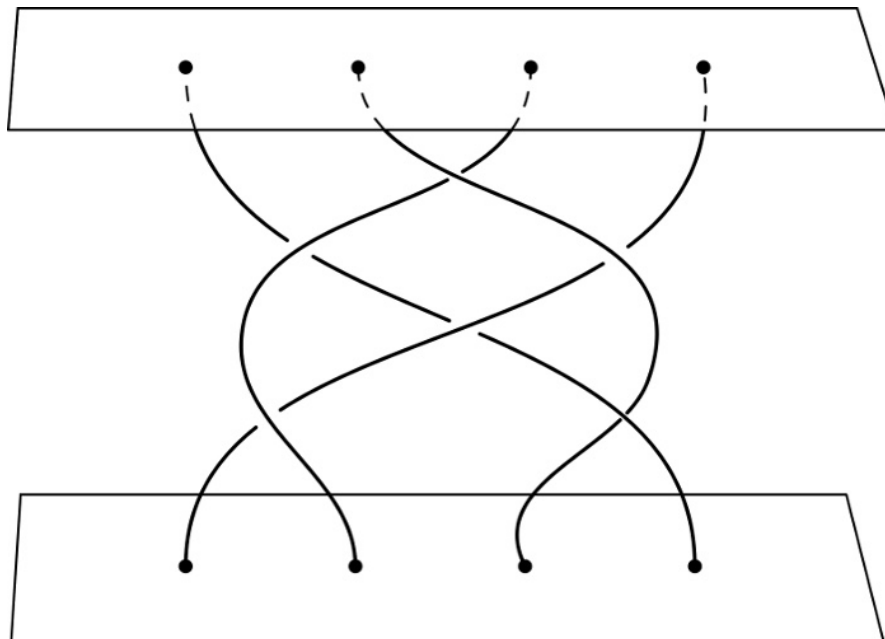
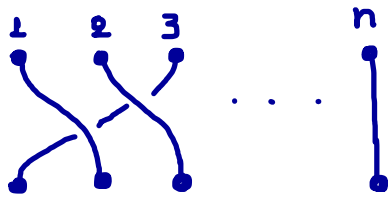
(Hoste - Ocneanu - Millet - Freyd - Lickorish - Yetter, 1985 /
Przytycki - Traczyk, 1987)

Groupe de tresses

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \end{array} \right\rangle$$

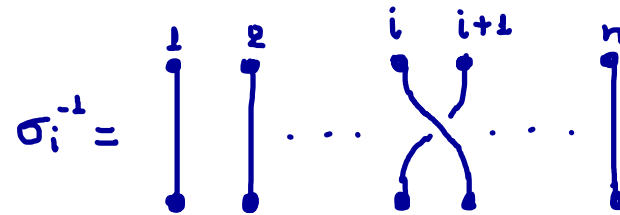
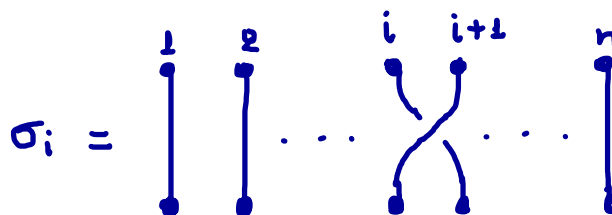
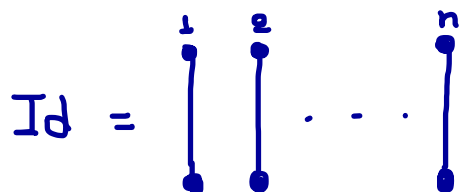
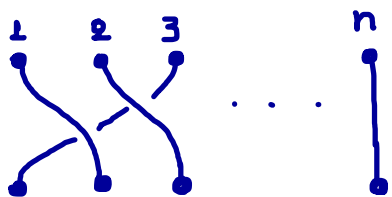
Groupe de tresses

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \end{array} \right\rangle$$



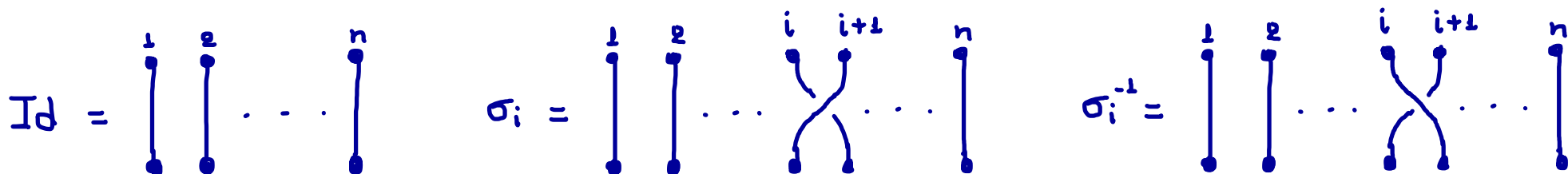
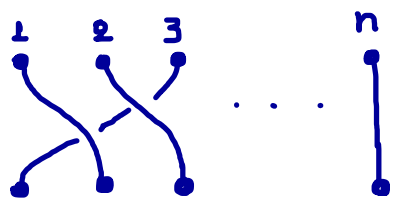
Groupe de tresses

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \end{array} \begin{array}{l} i = 1, \dots, n-2 \\ \text{si } |i-j| > 1 \end{array} \right\rangle$$

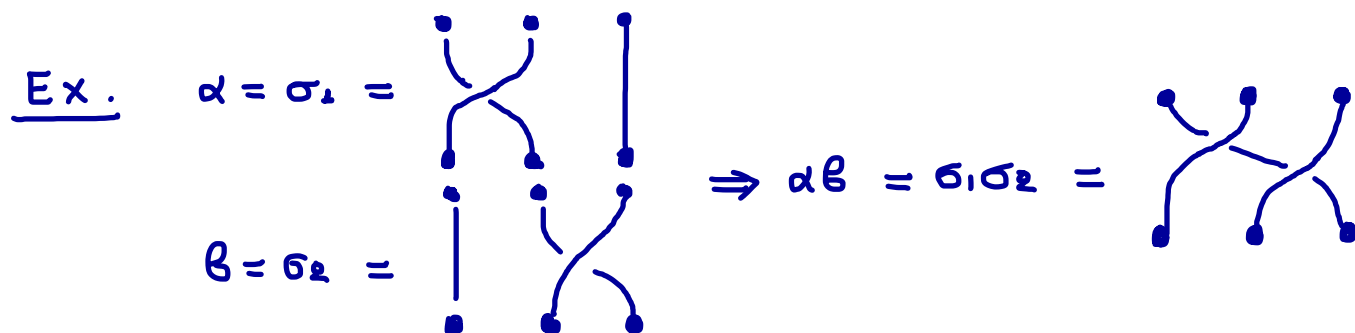


Groupe de tresses

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \end{array} \begin{array}{l} i = 1, \dots, n-2 \\ \text{si } |i-j| > 1 \end{array} \right\rangle$$



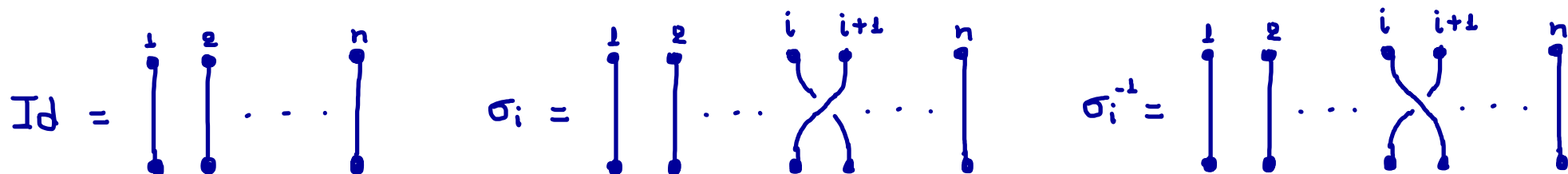
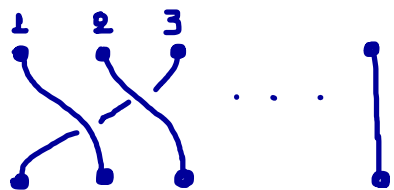
Multiplication : concaténation de diagrammes



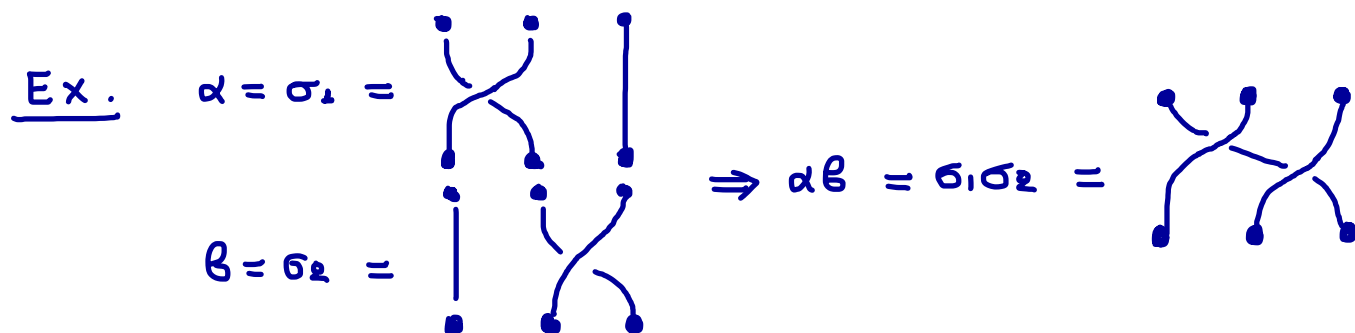
Groupe de tresses

$$B_n = \left\langle \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \mid \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \end{array} \begin{array}{l} i = 1, \dots, n-2 \\ \text{si } |i-j| > 1 \end{array} \right\rangle$$

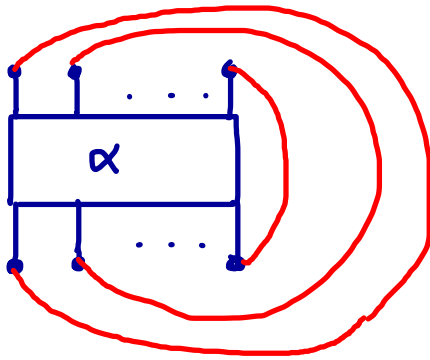
$$B_n / \langle \sigma_i^2 \rangle \cong S_n$$



Multiplication : concaténation de diagrammes

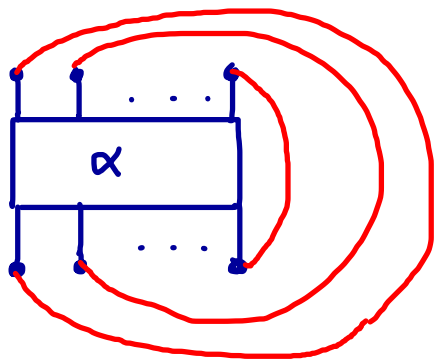


Tout élément de B_n produit un noeud ou un entrelacs :

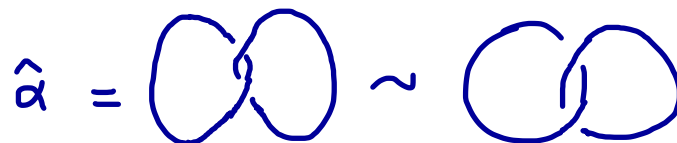
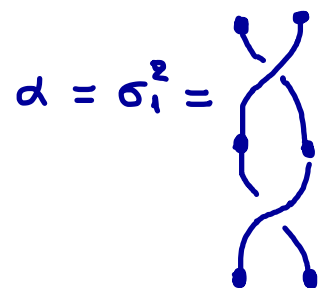
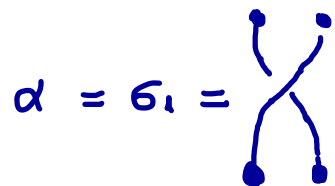
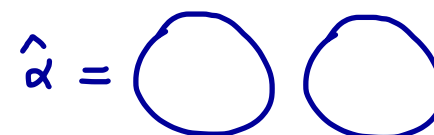
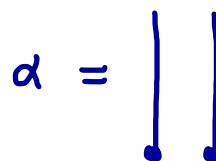
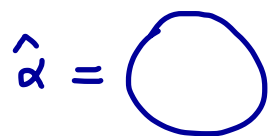
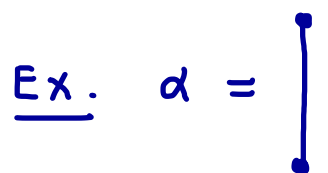


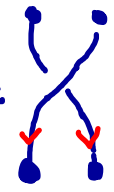
$= : \hat{\alpha} = \text{clôture de } \alpha$

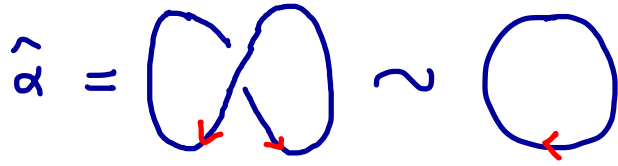
Tout élément de B_n produit un noeud ou un entrelacs :

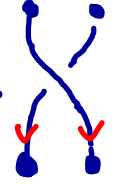


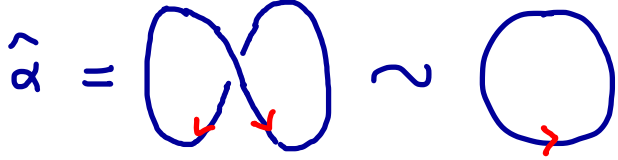
$= : \hat{\alpha} = \text{cl\^o}t\text{ure de } \alpha$




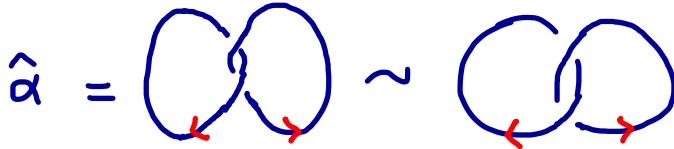
$$\alpha = \sigma_1 =$$


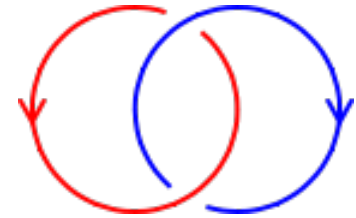
$$\hat{\alpha} =$$



$$\alpha = \sigma_1^{-1} =$$


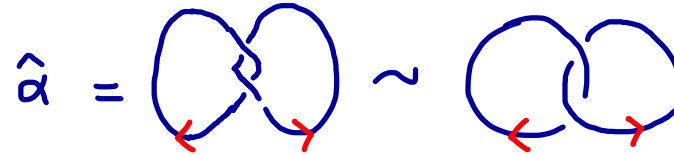
$$\hat{\alpha} =$$


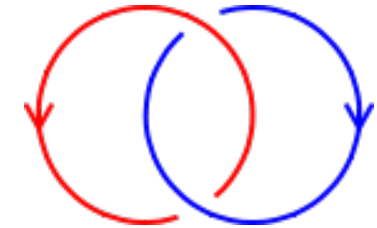
$$\alpha = \sigma_{1,2}^{-2} =$$


$$\hat{\alpha} =$$




$$\alpha = \sigma_{1,2}^{-2} =$$


$$\hat{\alpha} =$$




$$\alpha = \sigma_1^3$$

$$\hat{\alpha} = \text{trèfle à droite}$$



$$\alpha = \sigma_1^{-3}$$

$$\hat{\alpha} = \text{trèfle à gauche}$$



Théorème d'Alexander (1923)

Tout nœud ou entrelacs peut être obtenu comme la clôture d'une tresse $\alpha \in \bigcup_{n \geq 1} B_n$

Théorème d'Alexander (1923)

Tout nœud ou entrelacs peut être obtenu comme la clôture d'une tresse $\alpha \in \bigsqcup_{n \geq 1} B_n$

Définissons une relation d'équivalence sur $\bigsqcup_{n \geq 1} B_n$

comme la clôture transitive des relations :

$$(i) \quad \alpha\beta \sim \beta\alpha, \quad \alpha, \beta \in B_n \quad (\text{conjugaison})$$

$$(ii) \quad \alpha \sim \alpha\sigma_n^{\pm 1}, \quad \alpha \in B_n \quad (\text{stabilisation})$$

Théorème d'Alexander (1923)

Tout nœud ou entrelacs peut être obtenu comme la clôture d'une tresse $\alpha \in \bigsqcup_{n \geq 1} B_n$

Définissons une relation d'équivalence sur $\bigsqcup_{n \geq 1} B_n$

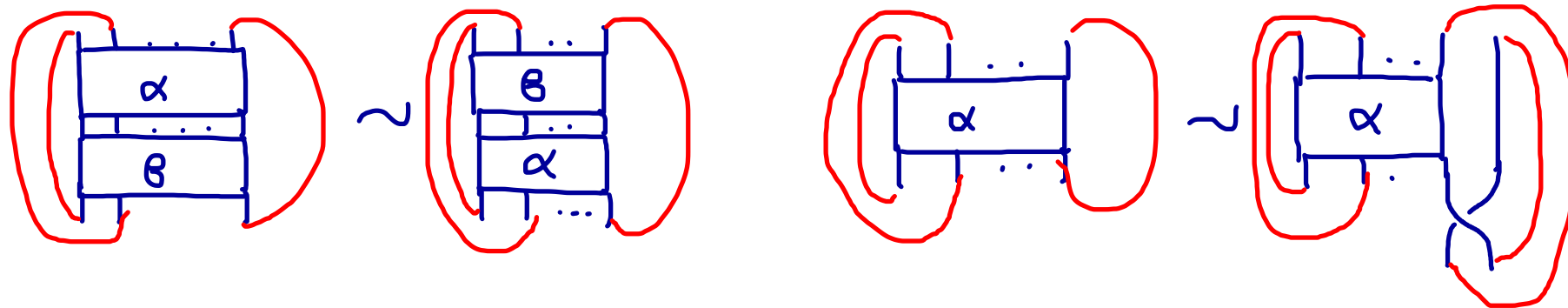
comme la clôture transitive des relations :

(i) $\alpha\beta \sim \beta\alpha$, $\alpha, \beta \in B_n$ (conjugaison)

(ii) $\alpha \sim \alpha\sigma_n^{\pm 1}$, $\alpha \in B_n$ (stabilisation)

Théorème de Markov (1935)

Nous avons $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ si et seulement si $\alpha \sim \beta$.



Théorème d'Alexander (1923)

Tout nœud ou entrelacs peut être obtenu comme la clôture d'une tresse $\alpha \in \bigcup_{n \geq 1} B_n$

Définissons une relation d'équivalence sur $\bigcup_{n \geq 1} B_n$

comme la clôture transitive des relations :

(i) $\alpha\beta \sim \beta\alpha$, $\alpha, \beta \in B_n$ (conjugaison)

(ii) $\alpha \sim \alpha\sigma_n^{\pm 1}$, $\alpha \in B_n$ (stabilisation)

Théorème de Markov (1935)

Nous avons $\hat{\alpha} \sim \hat{\beta}$ si et seulement si $\alpha \sim \beta$.

Corollaire : Une fonction $I : \bigcup_{n \geq 1} B_n \rightarrow S$ est un invariant de nœuds ssi

(i) $I(\alpha\beta) = I(\beta\alpha)$, $\alpha, \beta \in B_n$

(ii) $I(\alpha) = I(\alpha\sigma_n^{\pm 1})$, $\alpha \in B_n$

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle g_1, \dots, g_{n-1} \left| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \\ g_i g_j = g_j g_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \\ g_i^2 = q + (q-1)g_i \end{array} \right. \right\rangle \quad q \in \mathbb{C}^*$$

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle g_1, \dots, g_{n-1} \left| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \\ g_i g_j = g_j g_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \\ g_i^2 = q + (q-1)g_i \end{array} \right. \right\rangle \quad q \in \mathbb{C}^*$$

- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $\mathbb{C}[B_n]$

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle g_1, \dots, g_{n-1} \left| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \\ g_i g_j = g_j g_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \\ g_i^2 = q + (q-1)g_i \end{array} \right. \right\rangle \quad q \in \mathbb{C}^*$$

- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $\mathbb{C}[B_n]$
- $q = 1$: $\mathcal{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle g_1, \dots, g_{n-1} \left| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \\ g_i g_j = g_j g_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \\ g_i^2 = q + (q-1)g_i \end{array} \right. \right\rangle \quad q \in \mathbb{C}^*$$

- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $\mathbb{C}[B_n]$
- $q = 1$: $\mathcal{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$
- $g_i^{-1} = q^{-1}g_i + (q^{-1} - 1) \quad \forall i = 1, \dots, n-1$

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

$$\mathfrak{H}_n(q) = \left\langle g_1, \dots, g_{n-1} \left| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \\ g_i g_j = g_j g_i \text{ si } |i-j| > 1 \\ g_i^2 = q + (q-1)g_i \end{array} \right. \right\rangle \quad q \in \mathbb{C}^*$$

- $\mathfrak{H}_n(q)$ est un quotient de $\mathbb{C}[B_n]$
- $q = 1$: $\mathfrak{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$
- $g_i^{-1} = q^{-1}g_i + (q^{-1} - 1) \quad \forall i = 1, \dots, n-1$

$$\mathbb{C} = \mathfrak{H}_1(q) \subset \mathfrak{H}_2(q) \subset \dots \subset \mathfrak{H}_n(q) \subset \mathfrak{H}_{n+1}(q) \subset \dots$$

Algèbre de Iwahori-Hecke de type A

$$\mathcal{H}_n(q) = \left\langle g_1, \dots, g_{n-1} \left| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1} \\ g_i g_j = g_j g_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \\ g_i^2 = q + (q-1)g_i \end{array} \right. \right\rangle \quad q \in \mathbb{C}^*$$

- $\mathcal{H}_n(q)$ est un quotient de $\mathbb{C}[B_n]$
- $q = 1$: $\mathcal{H}_n(1) \cong \mathbb{C}[S_n]$
- $g_i^{-1} = q^{-1}g_i + (q^{-1} - 1) \quad \forall i = 1, \dots, n-1$

$$\mathbb{C} = \mathcal{H}_1(q) \subset \mathcal{H}_2(q) \subset \dots \subset \mathcal{H}_n(q) \subset \mathcal{H}_{n+1}(q) \subset \dots$$

Théorème (Jones - Ocneanu 1987)

Soit $z \in \mathbb{C}^*$. $\exists!$ application linéaire $\tau : \bigcup_{n \geq 1} \mathcal{H}_n(q) \longrightarrow \mathbb{C}$, telle que

- $\tau(1) = 1$
- $\tau(ab) = \tau(ba) \quad \forall a, b \in \mathcal{H}_n(q)$
- $\tau(ag_n) = z \tau(a) \quad \forall a \in \mathcal{H}_n(q)$

$$\begin{array}{ccccccc} B_n & \hookrightarrow & \mathbb{C}[B_n] & \xrightarrow{\pi} & \mathfrak{h}_n(q) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C} \\ \sigma_i & \mapsto & \sigma_i & \mapsto & g_i & & \end{array}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_n & \hookrightarrow & \mathbb{C}[B_n] & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{H}_n(q) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C} \\
 \sigma_i & \mapsto & \sigma_i & \mapsto & g_i & &
 \end{array}$$

Soit $\alpha \in B_n$. Posons $P(\alpha) := \Lambda^{n-1}(\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\tau \circ \pi)(\alpha)$, où

- $\lambda := q^{-1} - z^{-1} + q^{-1}z^{-1}$
- $\Lambda := (z\sqrt{\lambda})^{-1}$
- Si $\alpha = \sum r_i \sigma_i$, $\exp(\alpha) := \sum r_i$

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_n & \hookrightarrow & \mathbb{C}[B_n] & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{H}_n(q) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C} \\
 \sigma_i & \mapsto & \sigma_i & \mapsto & g_i & &
 \end{array}$$

Soit $\alpha \in B_n$. Posons $P(\alpha) := \Lambda^{n-1}(\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\tau \circ \pi)(\alpha)$, où

- $\lambda := q^{-1} - z^{-1} + q^{-1}z^{-1}$
- $\Lambda := (z\sqrt{\lambda})^{-1}$
- Si $\alpha = \sum \sigma_i^{r_i}$, $\exp(\alpha) := \sum r_i$

Alors $P : \bigsqcup_{n \geq 1} B_n \rightarrow \mathbb{C}$ est un invariant de nœuds : **HOMFLYPT**

(Hoste - Ocneanu - Millet - Freyd - Lickorish - Yetter / Przytycki - Traczyk)

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_n & \hookrightarrow & \mathbb{C}[B_n] & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{H}_n(q) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C} \\
 \sigma_i & \longmapsto & \sigma_i & \longmapsto & g_i & &
 \end{array}$$

Soit $\alpha \in B_n$. Posons $P(\alpha) := \Lambda^{n-1}(\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\tau \circ \pi)(\alpha)$, où

- $\lambda := q^{-1} - z^{-1} + q^{-1}z^{-1}$
- $\Lambda := (z\sqrt{\lambda})^{-1}$
- Si $\alpha = \prod \sigma_i^{r_i}$, $\exp(\alpha) := \sum r_i$

Alors $P : \bigsqcup_{n \geq 1} B_n \rightarrow \mathbb{C}$ est un invariant de nœuds : **HOMFLYPT**

(Hoste - Ocneanu - Millet - Freyd - Lickorish - Yetter / Przytycki - Traczyk)

Preuve :

$$P(\alpha\beta) = P(\beta\alpha) \quad \forall \alpha, \beta \in B_n$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_n & \hookrightarrow & \mathbb{C}[B_n] & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{H}_n(q) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C} \\
 \sigma_i & \longmapsto & \sigma_i & \longmapsto & g_i & &
 \end{array}$$

Soit $\alpha \in B_n$. Posons $P(\alpha) := \Lambda^{n-1}(\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\tau \circ \pi)(\alpha)$, où

- $\lambda := q^{-1} - z^{-1} + q^{-1}z^{-1}$
- $\Lambda := (z\sqrt{\lambda})^{-1}$
- Si $\alpha = \sum \sigma_i^{r_i}$, $\exp(\alpha) := \sum r_i$

Alors $P : \bigsqcup_{n \geq 1} B_n \rightarrow \mathbb{C}$ est un invariant de nœuds : **HOMFLYPT**
 (Hoste - Ocneanu - Millet - Freyd - Lickorish - Yetter / Przytycki - Traczyk)

Preuve :

$$\begin{aligned}
 P(\alpha) = P(\alpha \sigma_n) &\Leftrightarrow \Lambda^{n-1}(\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} \tau(\pi(\alpha)) = \Lambda^n(\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)+1} \tau(\pi(\alpha)g_n) \\
 &\Leftrightarrow \tau(\pi(\alpha)) = \Lambda \sqrt{\lambda} z \tau(\pi(\alpha)) \\
 &\Leftrightarrow 1 = \Lambda z \sqrt{\lambda}
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_n & \hookrightarrow & \mathbb{C}[B_n] & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{H}_n(q) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C} \\
 \sigma_i & \mapsto & \sigma_i & \mapsto & g_i & &
 \end{array}$$

Soit $\alpha \in B_n$. Posons $P(\alpha) := \Lambda^{n-1}(\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\tau \circ \pi)(\alpha)$, où

- $\lambda := q^{-1} - z^{-1} + q^{-1}z^{-1}$
- $\Lambda := (z\sqrt{\lambda})^{-1}$
- Si $\alpha = \sum \sigma_i^{r_i}$, $\exp(\alpha) := \sum r_i$

Alors $P : \bigsqcup_{n \geq 1} B_n \rightarrow \mathbb{C}$ est un invariant de nœuds : **HOMFLYPT**
 (Hoste - Ocneanu - Millet - Freyd - Lickorish - Yetter / Przytycki - Traczyk)

Preuve :

$$\begin{aligned}
 P(\alpha\sigma_n) = P(\alpha\sigma_n^{-1}) &\Leftrightarrow \Lambda^n (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)+1} \tau(\pi(\alpha)g_n) = \Lambda^n (\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)-1} \tau(\pi(\alpha)g_n^{-1}) \\
 &\Leftrightarrow \lambda \tau(\pi(\alpha)g_n) = q^{-1} \tau(\pi(\alpha)g_n) + (q^{-1}-1) \tau(\pi(\alpha)) \\
 &\Leftrightarrow \lambda z \tau(\pi(\alpha)) = q^{-1} z \tau(\pi(\alpha)) + (q^{-1}-1) \tau(\pi(\alpha)) \\
 &\Leftrightarrow \lambda z = q^{-1} z + q^{-1} - 1
 \end{aligned}$$

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_n & \hookrightarrow & \mathbb{C}[B_n] & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{H}_n(q) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C} \\
 \sigma_i & \longmapsto & \sigma_i & \longmapsto & g_i & &
 \end{array}$$

Soit $\alpha \in B_n$. Posons $P(\alpha) := \Lambda^{n-1}(\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\tau \circ \pi)(\alpha)$, où

- $\lambda := q^{-1} - z^{-1} + q^{-1}z^{-1}$
- $\Lambda := (z\sqrt{\lambda})^{-1}$
- Si $\alpha = \sum r_i \sigma_i$, $\exp(\alpha) := \sum r_i$

Alors $P : \bigsqcup_{n \geq 1} B_n \rightarrow \mathbb{C}$ est un invariant de nœuds : **HOMFLYPT**

(Hoste - Ocneanu - Millet - Freyd - Lickorish - Yetter / Przytycki - Traczyk)

Rque : $P(1) = 1$ pour $1 \in B_1$

$$\begin{array}{ccccccc}
 B_n & \hookrightarrow & \mathbb{C}[B_n] & \xrightarrow{\pi} & \mathcal{H}_n(q) & \xrightarrow{\tau} & \mathbb{C} \\
 \sigma_i & \longmapsto & \sigma_i & \longmapsto & g_i & &
 \end{array}$$

Soit $\alpha \in B_n$. Posons $P(\alpha) := \Lambda^{n-1}(\sqrt{\lambda})^{\exp(\alpha)} (\tau \circ \pi)(\alpha)$, où

- $\lambda := q^{-1} - z^{-1} + q^{-1}z^{-1}$
- $\Lambda := (z\sqrt{\lambda})^{-1}$
- Si $\alpha = \sum \sigma_i^{r_i}$, $\exp(\alpha) := \sum r_i$

Alors $P : \bigsqcup_{n \geq 1} B_n \rightarrow \mathbb{C}$ est un invariant de nœuds : **HOMFLYPT**

(Hoste - Ocneanu - Millet - Freyd - Lickorish - Yetter / Przytycki - Traczyk)

Rque : $P(1) = 1$ pour $1 \in B_1$

Q Si $P(\alpha) = 1$, est-ce que $\hat{\alpha} \sim \bigcirc$?

On peut aussi définir P diagrammatiquement :

- $P(\bigcirc) = 1$

- $\gamma P(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}) - \gamma^{-1} P(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) = (q^{1/2} - q^{-1/2}) P(\begin{array}{c} \downarrow \\ \downarrow \end{array})$

où $\gamma := (q, \lambda)^{-1/2}$

Relation d'écheveau

On peut aussi définir P diagrammatiquement :

- $P(\bigcirc) = 1$

- $\gamma P(\begin{array}{c} \diagdown \\ \diagup \end{array}) - \gamma^{-1} P(\begin{array}{c} \diagup \\ \diagdown \end{array}) = (q^{1/2} - q^{-1/2}) P(\downarrow\downarrow)$

où $\gamma := (q\lambda)^{-1/2}$

Relation d'écheveau

Ex. $\gamma \underbrace{P(\bigcirc\bigcirc)}_{1} - \gamma^{-1} \underbrace{P(\infty)}_{1} = (q - q^{-1}) P(\bigcirc\bigcirc)$

$\Rightarrow P(\bigcirc\bigcirc) = \dots$

$\gamma \underbrace{P(\bigcirc\bigcirc)}_{1} - \gamma^{-1} \underbrace{P(\bigcirc\bigcirc)}_{P(\bigcirc\bigcirc)} = (q - q^{-1}) \underbrace{P(\bigcirc\bigcirc)}_{1}$

$\Rightarrow \dots$

L'algèbre de Temperley-Lieb

$$n \geq 3 \quad G_i := 1 + g_i + g_{i+1} + g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i + g_i g_{i+1} g_i$$

L'algèbre de Temperley-Lieb

$$n \geq 3 \quad G_i := 1 + g_i + g_{i+1} + g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i + g_i g_{i+1} g_i$$

$$TL_n(q) := \mathcal{A}_n(q) / I \quad \text{où} \quad I = \langle G_i \mid 1 \leq i \leq n-2 \rangle$$

L'algèbre de Temperley-Lieb

$$n \geq 3 \quad G_i := 1 + g_i + g_{i+1} + g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i + g_i g_{i+1} g_i$$

$$TL_n(q) := \mathcal{A}_n(q) / I \quad \text{où} \quad I = \langle G_i \mid 1 \leq i \leq n-2 \rangle$$

$$\text{Rque } G_i = (g_1 g_2 \dots g_{n-1})^{i-1} G_1 (g_1 g_2 \dots g_{n-1})^{-(i-1)}$$

$$\Rightarrow I = \langle G_1 \rangle \text{ principal}$$

L'algèbre de Temperley-Lieb

$$n \geq 3 \quad G_i := 1 + g_i + g_{i+1} + g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i + g_i g_{i+1} g_i$$

$$TL_n(q) := \mathcal{A}_n(q) / I \quad \text{où} \quad I = \langle G_i \mid 1 \leq i \leq n-2 \rangle$$

$$\text{Rque } G_i = (g_1 g_2 \dots g_{n-1})^{i-1} G_1 (g_1 g_2 \dots g_{n-1})^{-(i-1)}$$

$$\Rightarrow I = \langle G_1 \rangle \text{ principal}$$

$$\tau \text{ passe au quotient} \iff \tau(G_1) = 0$$

L'algèbre de Temperley-Lieb

$$n \geq 3 \quad G_i := 1 + g_i + g_{i+1} + g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i + g_i g_{i+1} g_i$$

$$TL_n(q) := \mathcal{A}_n(q) / I \quad \text{où} \quad I = \langle G_i \mid 1 \leq i \leq n-2 \rangle$$

$$\text{Rque } G_i = (g_1 g_2 \dots g_{n-1})^{i-1} G_1 (g_1 g_2 \dots g_{n-1})^{-(i-1)}$$

$$\Rightarrow I = \langle G_1 \rangle \text{ principal}$$

$$\begin{aligned} \tau \text{ passe au quotient} &\Leftrightarrow \tau(G_1) = 0 \Leftrightarrow 1 + z + z^2 + z(q + (q-1)z) = 0 \\ &\Leftrightarrow (q+1)z^2 + (q+2)z + 1 = 0 \\ &\Leftrightarrow z = -1 \quad \text{ou} \quad z = -\frac{1}{q+1} \end{aligned}$$

L'algèbre de Temperley-Lieb

$$n \geq 3 \quad G_i := 1 + g_i + g_{i+1} + g_i g_{i+1} + g_{i+1} g_i + g_i g_{i+1} g_i$$

$$TL_n(q) := \mathcal{A}_n(q) / I \quad \text{où} \quad I = \langle G_i \mid 1 \leq i \leq n-2 \rangle$$

$$\text{Rque } G_i = (g_1 g_2 \dots g_{n-1})^{i-1} G_1 (g_1 g_2 \dots g_{n-1})^{-(i-1)}$$

$$\Rightarrow I = \langle G_1 \rangle \text{ principal}$$

$$\tau \text{ passe au quotient} \Leftrightarrow \tau(G_1) = 0 \Leftrightarrow 1 + 2z + 2z^2 + z(q + (q-1)z) = 0$$

$$\Leftrightarrow (q+1)z^2 + (q+2)z + 1 = 0$$

$$\Leftrightarrow z = -1 \quad \text{ou} \quad z = -\frac{1}{q+1}$$

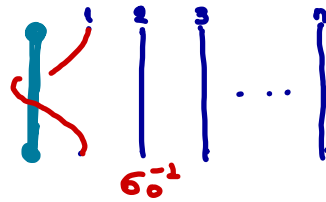
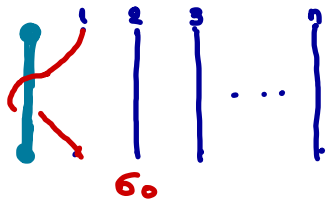
$$z = -\frac{1}{q+1} : P = \text{polynôme de Jones}$$

Groupe de tresses affine (ou de type B)

$$B_n^{\text{aff}} = \left\langle \begin{array}{l} \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \\ \sigma_0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \\ \sigma_0 \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1 \sigma_0 \end{array} \right\rangle$$

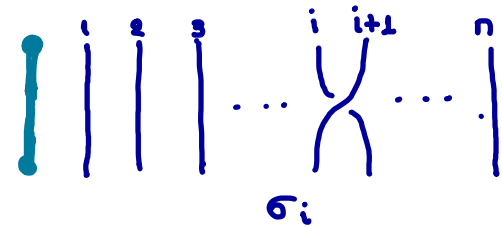
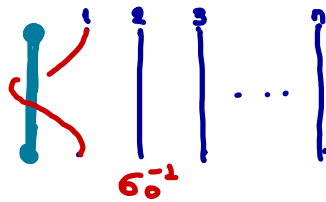
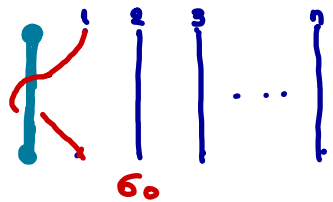
Groupe de tresses affine (ou de type B)

$$B_n^{\text{aff}} = \left\langle \begin{array}{l} \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \\ \sigma_0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \\ \sigma_0 \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1 \sigma_0 \end{array} \right\rangle$$



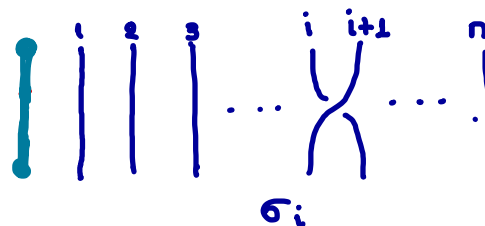
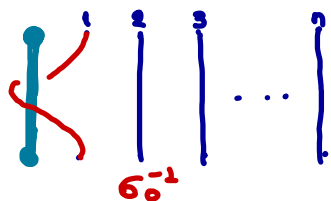
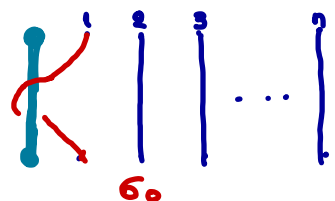
Groupe de tresses affine (ou de type B)

$$B_n^{\text{aff}} = \left\langle \begin{array}{l} \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \\ \sigma_0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \\ \sigma_0 \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1 \sigma_0 \end{array} \right\rangle$$



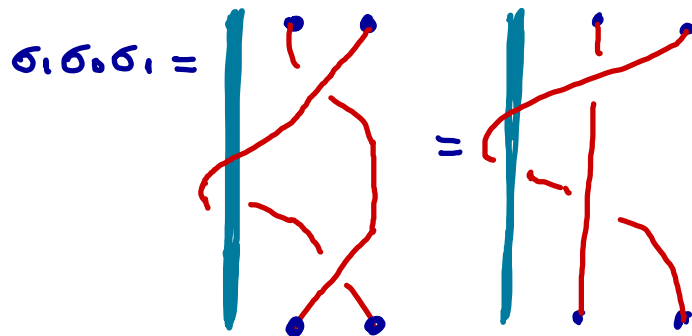
Groupe de tresses affine (ou de type B)

$$B_n^{\text{aff}} = \left\langle \begin{array}{l} \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \\ \sigma_0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \\ \sigma_0 \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1 \sigma_0 \end{array} \right\rangle$$



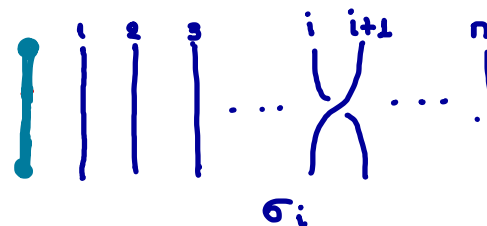
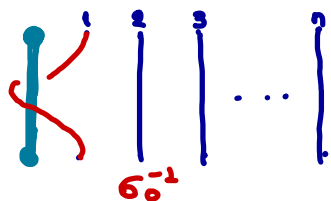
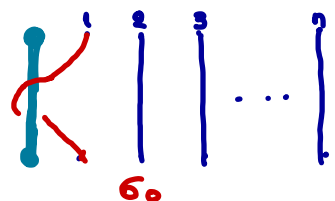
Multiplication : concaténation de diagrammes

Ex.

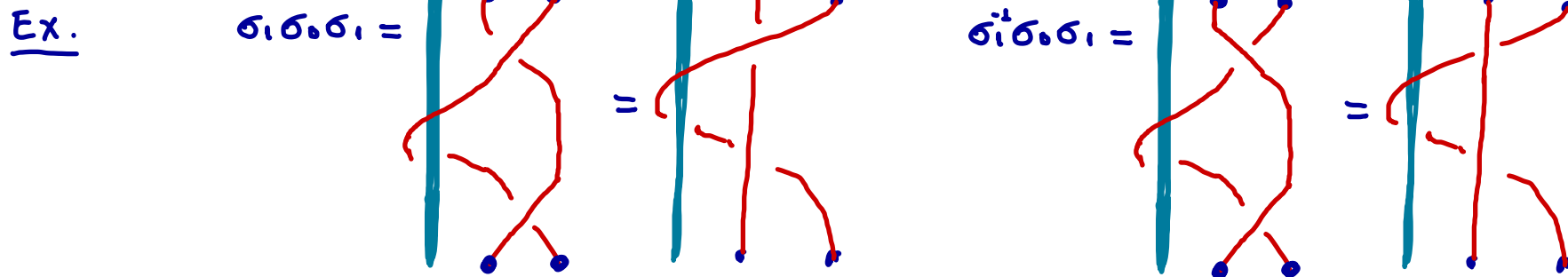


Groupe de tresses affine (ou de type B)

$$B_n^{\text{aff}} = \left\langle \begin{array}{l} \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1} \\ \sigma_0 \end{array} \middle| \begin{array}{l} \sigma_i \sigma_{i+1} \sigma_i = \sigma_{i+1} \sigma_i \sigma_{i+1} \quad i = 1, \dots, n-2 \\ \sigma_i \sigma_j = \sigma_j \sigma_i \quad \text{si } |i-j| > 1 \\ \sigma_0 \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1 = \sigma_1 \sigma_0 \sigma_1 \sigma_0 \end{array} \right\rangle$$



Multiplication : concaténation de diagrammes



Théorème (Lambropoulou - 1994)

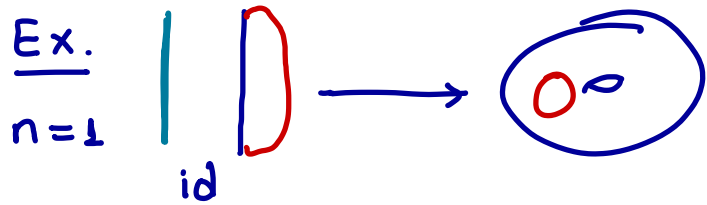
- Si $\alpha \in B_n^{\text{aff}}$, alors $\hat{\alpha}$ est un entrelacs dans le tore solide

Théorème (Lambropoulou - 1994)

- Si $\alpha \in B_n^{\text{aff}}$, alors $\hat{\alpha}$ est un entrelacs dans le tore solide
- Les théorèmes d'Alexander et de Markov sont valables dans ce cas

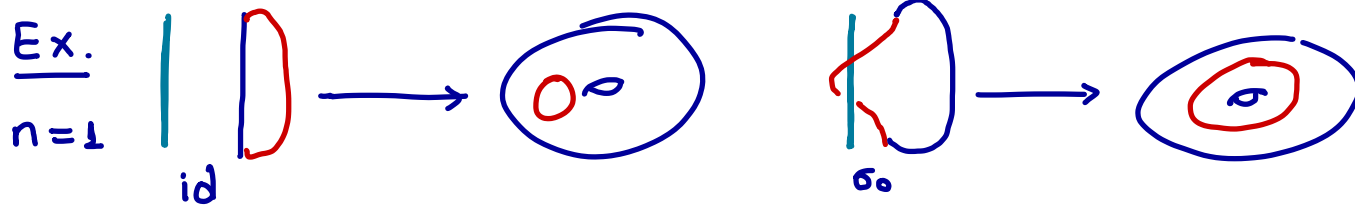
Théorème (Lambropoulou - 1994)

- Si $\alpha \in B_n^{\text{aff}}$, alors $\hat{\alpha}$ est un entrelacs dans le tore solide
- Les théorèmes d'Alexander et de Markov sont valables dans ce cas



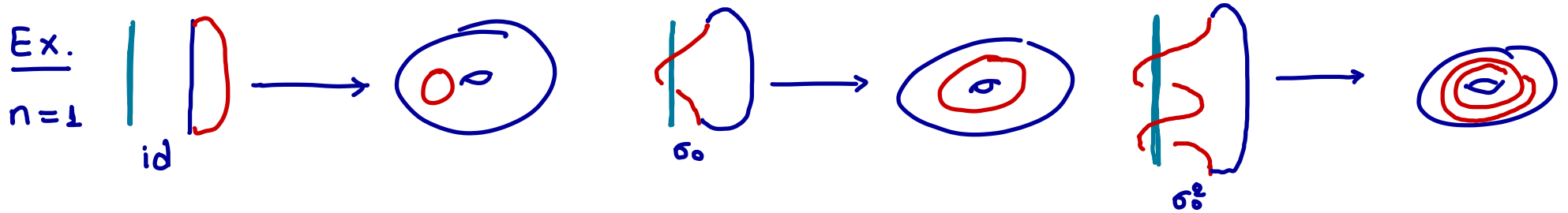
Théorème (Lambropoulou - 1994)

- Si $\alpha \in B_n^{\text{aff}}$, alors $\hat{\alpha}$ est un entrelacs dans le tore solide
- Les théorèmes d'Alexander et de Markov sont valables dans ce cas



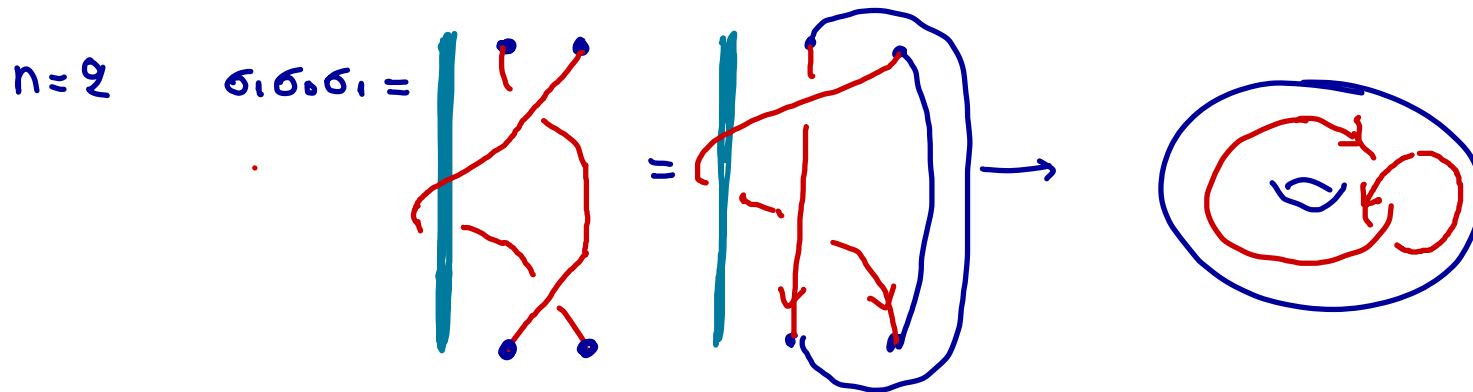
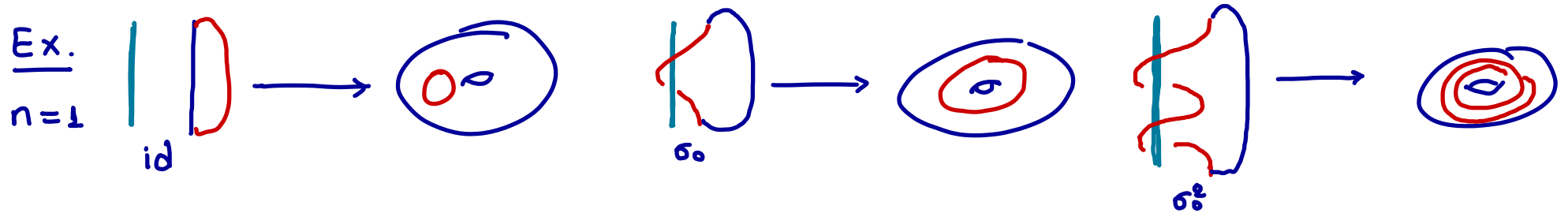
Théorème (Lambropoulou - 1994)

- Si $\alpha \in B_n^{\text{aff}}$, alors $\hat{\alpha}$ est un entrelacs dans le tore solide
- Les théorèmes d'Alexander et de Markov sont valables dans ce cas



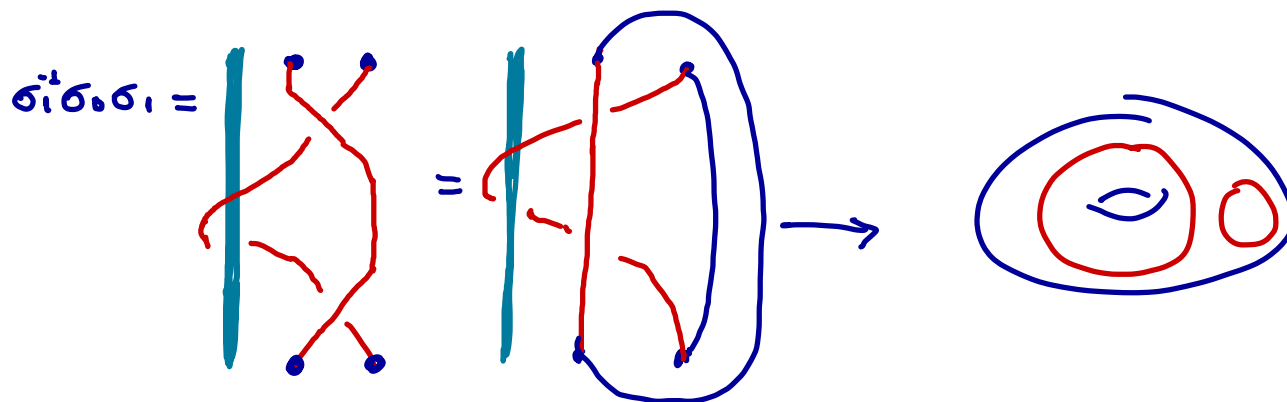
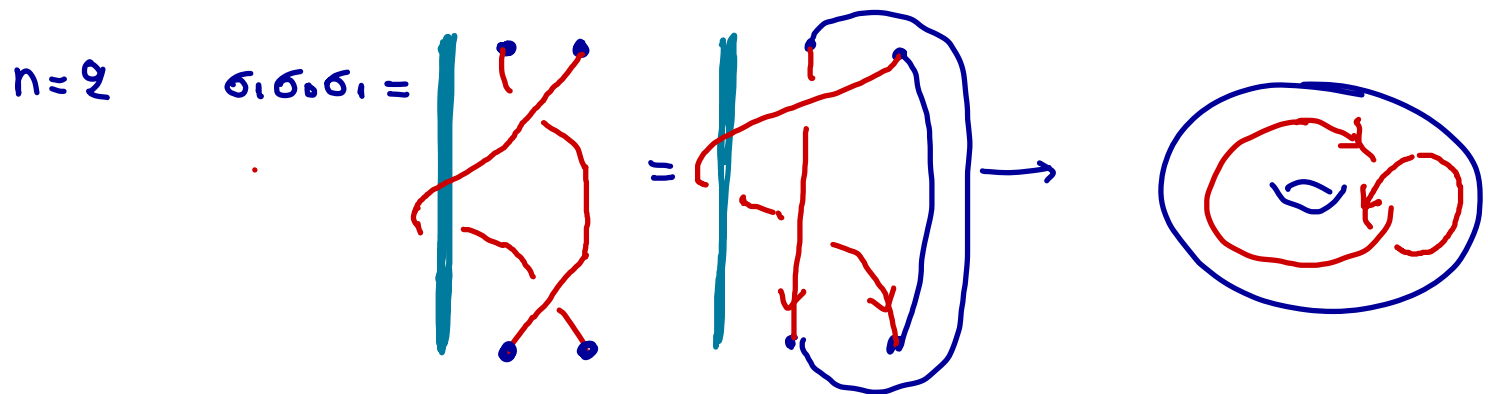
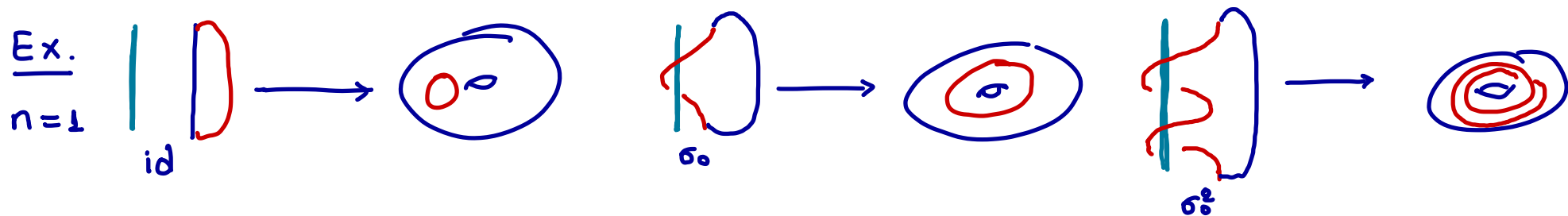
Théorème (Lambropoulou - 1994)

- Si $\alpha \in B_n^{\text{aff}}$, alors $\hat{\alpha}$ est un entrelacs dans le tore solide
- Les théorèmes d'Alexander et de Markov sont valables dans ce cas



Théorème (Lambropoulou - 1994)

- Si $\alpha \in B_n^{\text{aff}}$, alors $\hat{\alpha}$ est un entrelacs dans le tore solide
- Les théorèmes d'Alexander et de Markov sont valables dans ce cas



Algèbres-quotients de $\mathbb{C}[B_n^{\text{aff}}]$

- (1) Algèbre de Iwahori-Hecke de type B : Image de σ_0 satisfait une relation quadratique
- (2) Algèbre de Hecke cyclotomique : Image de σ_0 satisfait une relation d'ordre $m \geq 2$
- (3) Algèbre de Hecke affine de type A : Image de σ_0 ne satisfait pas de relation d'ordre

Algèbres-quotients de $\mathbb{C}[B_n^{\text{aff}}]$

- (1) Algèbre de Iwahori-Hecke de type B : Image de σ_0 satisfait une relation quadratique
- (2) Algèbre de Hecke cyclotomique : Image de σ_0 satisfait une relation d'ordre $m \geq 2$
- (3) Algèbre de Hecke affine de type A : Image de σ_0 ne satisfait pas de relation d'ordre
- (1) Trace par Geck-Lambropoulou (1997)
(2) & (3) Trace par Lambropoulou (1999) } \Rightarrow Invariants de noeuds dans le tore solide

Groupe de tresses à poids

Soit $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$\begin{array}{l} (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n \\ \parallel \\ (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n \end{array} = \left\langle \begin{array}{l} \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, t_1, \dots, t_n \end{array} \right| \begin{array}{l} \sigma_i \text{ comme avant} \\ t_j^d = 1 \quad j=1, \dots, n \\ t_i t_j = t_j t_i \quad i, j=1, \dots, n \\ t_j \sigma_i = \sigma_i t_{s_i(j)} \end{array} \right\rangle$$

où $s_i = (i, i+1) \in S_n$

Groupe de tresses à poids

Soit $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$\begin{array}{l}
 (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n \\
 \parallel \\
 (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n
 \end{array}
 = \left\langle \begin{array}{l} \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, t_1, \dots, t_n \end{array} \right| \begin{array}{l} \sigma_i \text{ comme avant} \\ t_j^d = 1 \quad j=1, \dots, n \\ t_i t_j = t_j t_i \quad i, j=1, \dots, n \\ t_j \sigma_i = \sigma_i t_{\sigma_i(j)} \end{array} \right\rangle$$

où $s_i = (i, i+1) \in S_n$

Ex. $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}, n=2$

$$t_1^a t_2^b = \begin{array}{c} a \quad b \\ \bullet \quad \bullet \\ | \quad | \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1 = \begin{array}{c} a \quad b \\ \bullet \quad \bullet \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1^2 = \begin{array}{c} a \quad b \\ \bullet \quad \bullet \\ \curvearrowright \quad \curvearrowleft \\ \bullet \quad \bullet \end{array}$$

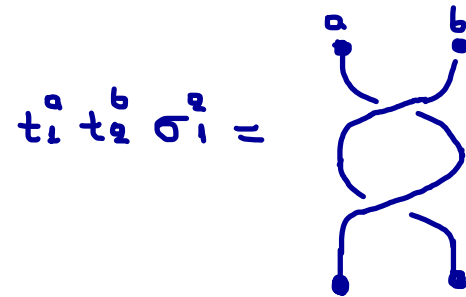
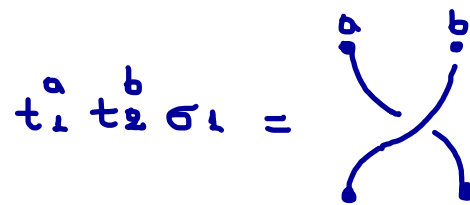
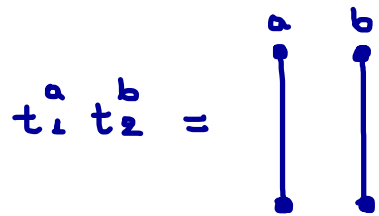
Groupe de tresses à poids

Soit $d \in \mathbb{Z}_{>0}$

$$\begin{array}{l}
 (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n \\
 \parallel \\
 (\mathbb{Z}/d\mathbb{Z})^n \rtimes B_n
 \end{array}
 = \left\langle \begin{array}{l} \sigma_1, \dots, \sigma_{n-1}, t_1, \dots, t_n \end{array} \right| \begin{array}{l} \sigma_i \text{ comme avant} \\ t_j^d = 1 \quad j=1, \dots, n \\ t_i t_j = t_j t_i \quad i, j=1, \dots, n \\ t_j \sigma_i = \sigma_i t_{\sigma_i(j)} \end{array} \right\rangle$$

où $s_i = (i, i+1) \in S_n$

Ex. $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}, n=2$

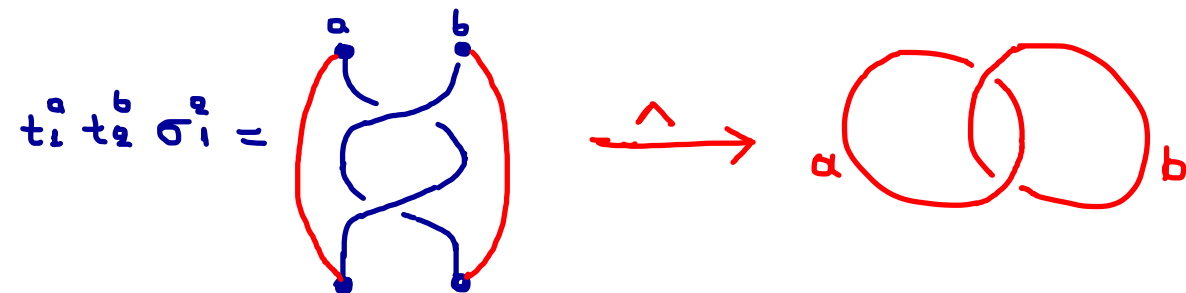
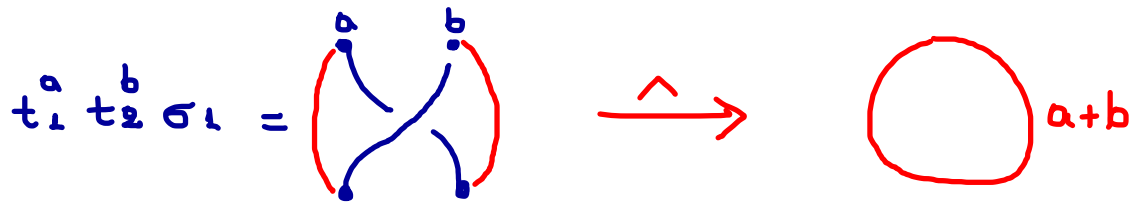


Multiplication : concaténation de diagrammes

Ex. $(t_1^a t_2^b \sigma_1) \cdot (t_1^{a'} t_2^{b'}) = t_1^{a+b'} t_2^{b+a'} \sigma_1$

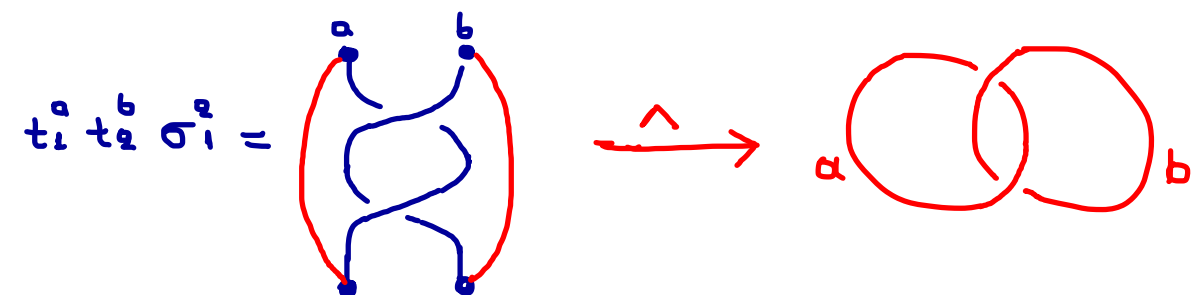
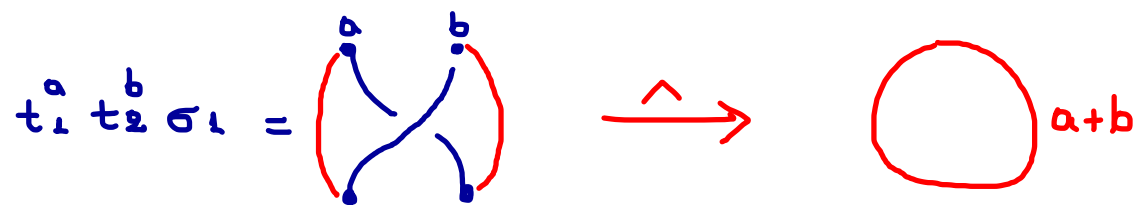
Tout élément de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$ produit un noeud ou un entrelac à poids

E.g. $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, $n=2$



Tout élément de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$ produit un noeud ou un entrelac à poids

E.g. $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, $n=2$



$d=3$: $\widehat{t_1 t_2 \sigma_1} \sim \widehat{t_1^2 \sigma_1}$, $\widehat{t_1 t_2 \sigma_1^2} \not\sim \widehat{t_1^2 \sigma_1^2}$

Tout élément de $(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n$ produit un noeud ou un entrelac **à poids**

E.g. $a, b \in \{0, 1, \dots, d-1\}$, $n=2$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1 = \begin{array}{c} \overset{a}{\bullet} \quad \overset{b}{\bullet} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \xrightarrow{\wedge} \bigcirc_{a+b}$$

$$t_1^a t_2^b \sigma_1^2 = \begin{array}{c} \overset{a}{\bullet} \quad \overset{b}{\bullet} \\ \text{---} \text{---} \\ \text{---} \text{---} \\ \bullet \quad \bullet \end{array} \xrightarrow{\wedge} \bigcirc_a \bigcirc_b$$

$$d=3 : \quad \widehat{t_1 t_2 \sigma_1} \sim \widehat{t_1^2 \sigma_1} \quad , \quad \widehat{t_1 t_2 \sigma_1^2} \not\sim \widehat{t_1^2 \sigma_1^2}$$

Théorème d'Alexander : évident

Théorème de Markov : Ko - Smolinsky (1992)

Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{l} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = (q-1) e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

$$\text{où } e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_{i+1}^{d-s} \text{ est un idempotent.}$$

Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{l} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = (q-1) e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

où $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_i^{d-s}$ est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$ est un quotient de $\mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$

Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{l} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = (q-1) e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

où $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_i^{d-s}$ est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$ est un quotient de $\mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $Y_{1,n}(q) \cong \mathcal{H}_n(q)$

Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{l} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = (q-1) e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

où $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_i^{d-s}$ est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$ est un quotient de $\mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $Y_{1,n}(q) \cong \mathcal{H}_n(q)$
- Trace par Tsuchiura (2004)

Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{l} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = (q-1) e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

où $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_i^{d-s}$ est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$ est un quotient de $\mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $Y_{1,n}(q) \cong \mathcal{H}_n(q)$
- Trace par Tsumaya (2004)
- Invariants de nœuds à poids par Tsumaya-Lambropoulou (2013),
C.-Tsumaya-Karvounis-Lambropoulou (2018)

Algèbre de Yokonuma - Hecke de type A

$$q \in \mathbb{C}^*$$

$$Y_{d,n}(q) = \left\langle \begin{array}{l} g_1, \dots, g_{n-1} \\ t_1, \dots, t_n \end{array} \middle| \begin{array}{l} g_i g_{i+1} g_i = g_{i+1} g_i g_{i+1}, \quad g_i g_j = g_j g_i \quad \text{if } |i-j| > 1 \\ t_j^d = 1, \quad t_i t_j = t_j t_i, \quad t_j g_i = g_i t_{s_i(j)} \\ g_i^2 = (q-1) e_i g_i + q \end{array} \right\rangle$$

où $e_i := \frac{1}{d} \sum_{s=0}^{d-1} t_i^s t_i^{d-s}$ est un idempotent.

- $Y_{d,n}(q)$ est un quotient de $\mathbb{C}[(\mathbb{Z}/d\mathbb{Z}) \wr B_n]$
- $Y_{1,n}(q) \cong \mathcal{H}_n(q)$
- Trace par Tsumaya (2004)
- Invariants de nœuds à poids par Tsumaya-Lambropoulou (2013),
C.-Tsumaya-Karvounis-Lambropoulou (2018)
plus fins que le polynôme de HOMFLYPT (CJKL-2018)

Autres algèbres de noeuds

Algèbre (de)

- Temperley - Lieb à poids
- Yokonuma - Hecke cyclotomique
- Yokonuma - Hecke affine

Invariant de noeuds

- Généralisation de Jones
- Généralisation des invariants de Lambropoulou et Geck

Autres algèbres de noeuds

Algèbre (de)

- Temperley - Lieb à poids
 - Yokonuma - Hecke cyclotomique
 - Yokonuma - Hecke affine
- }
- BMW
 - Hecke singulière
 - Rook

Invariant de noeuds

- Généralisation de Jones
- Généralisation des invariants de Lambropoulou et Geck
- Kauffman
- Kauffman-Vogel & Paris-Rabenda
- Alexander

Autres algèbres de noeuds

Algèbre (de)

- Temperley - Lieb à poids
- Yokonuma - Hecke cyclotomique
- Yokonuma - Hecke affine

- BMW
- Hecke singulière
- Rook

Invariant de noeuds

- Généralisation de Jones
- Généralisation des invariants de Lambropoulou et Geck
- Kauffman
- Kauffman-Vogel & Paris-Rabenda
- Alexander

Catégorification des invariants polynômiaux

Autres algèbres de noeuds

Algèbre (de)

- Temperley - Lieb à poids
- Yokonuma - Hecke cyclotomique
- Yokonuma - Hecke affine

- BMW
- Hecke singulière
- Rook

Invariant de noeuds

- Généralisation de Jones
- Généralisation des invariants de Lambropoulou et Geck
- Kauffman
- Kauffman-Vogel & Paris-Rabenda
- Alexander

Catégorification des invariants polynômiaux

- Homologie de Khovanov (\leadsto Jones)

Autres algèbres de noeuds

Algèbre (de)

- Temperley - Lieb à poids
- Yokonuma - Hecke cyclotomique
- Yokonuma - Hecke affine

- BMW
- Hecke singulière
- Rook

Invariant de noeuds

- Généralisation de Jones
- Généralisation des invariants de Lambropoulou et Geck

- Kauffman
- Kauffman - Vogel & Paris - Rabenda
- Alexander

Catégorification des invariants polynômiaux

- Homologie de Khovanov (\rightsquigarrow Jones)

$$H(L) = H(\bigcirc) \Leftrightarrow L \sim \bigcirc$$