L'escalier infini

On dispose de carrés de 12 cm de côté que l'on empile

Combien de marches faut-il au minimum pour que la dernière soit complètement dans le vide ?

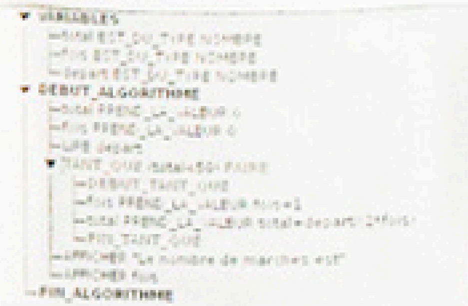
Suite à nos expériences, nous avons trouvé qu'il fallait au minimum 4 marches pour que la dernière soit dans le vide.
En les plaçant de la manière suivante :

longueur de la n-ième marche $= \frac{12}{2 \times n}$

$6 + 3 + 2 + 1{,}5 = 12{,}5$

Jusqu'où peut-on aller ?

On peut aller jusqu'à l'infini.



$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \underbrace{\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{8}\right)}_{> \frac{1}{8} + \frac{1}{8} = \frac{1}{4}} + \underbrace{\left(\frac{1}{10} + \frac{1}{12} + \frac{1}{14} + \frac{1}{16}\right)}_{> \frac{1}{4}} + \dots$$

Pour 50 cm → 2 336 marches
Pour 75 cm → 150 661 marches
Pour 80 cm → 346 666 marches

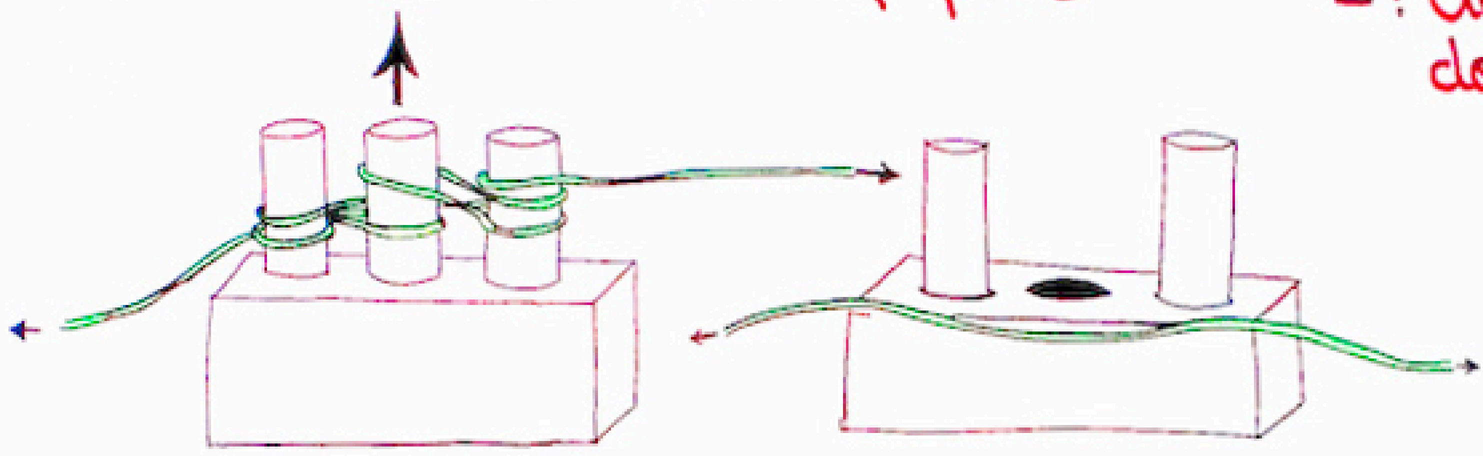
Jeux de ficelle

Problématique : Nous disposons de 3 piquets et d'une ficelle, après plusieurs enroulements, nous cherchons à dénouer la ficelle lorsque nous retirons l'un des piquets ...!

Légende :
- A tour sur un piquet A
- B tour sur un piquet B
- C tour sur un piquet C

+ : dans le sens des aiguilles d'une montre

− : dans le sens inverse des aiguilles d'une montre



Pour un piquet, le seul moyen de libérer la ficelle sans retirer de piquet est "d'annuler" le tour par un tour en sens inverse.

Exemple : $A^+ A^{2-}$ ne marche pas → 2 tours − et un seul tour +

$A^{2-} A^+ A^- A^{2+}$ marche → 3 tours − et 3 tours +

C'est le principe simple que l'on retrouve dans les solutions des enroulements à 2, 3 piquets (voire plus !)

Pour deux piquets, il n'y a pas encore besoin de se préoccuper des codages avec des simplifications. Ici, seul compte le nombre de tours plus et moins autour de chaque piquet. Ainsi, pour que la ficelle se défasse, il faut qu'il y ait le même nombre de tours plus et moins autour de chacun des deux piquets.

Exemple :
- $A^+ B^{2-} A^{3+} B^+ A^- B^- A^{2+}$ → pour A : 6+ ; 1- : cela ne marche pas
- $A^+ B^{2-} A^{3+} B^+ A^- B^+ A^{3-}$ → pour A : 4+ ; 4- ; pour B : 2- ; 2+ → cela marche pour A et B.

Avec 3 piquets :

$$A^+ B^- A^- B^+ C^- B^- A^+ B^+ A^- C^+$$

Quand on retire un piquet, il faut que la formule se simplifie :

On retire C : $A^+ B^- A^- \boxed{B^+ B^-} A^+ B^+ A^-$

$\Leftrightarrow A^+ B^- \boxed{A^- A^+} B^+ A^-$

$\Leftrightarrow A^+ \boxed{B^- B^+} A^-$

$\Leftrightarrow \boxed{A^+ A^-}$

$\Leftrightarrow \emptyset$

De même en retirant B : $\boxed{A^+ A^-} C^- \boxed{A^+ A^-} C^+$

$\Leftrightarrow \boxed{C^- C^+}$

$\Leftrightarrow \emptyset$

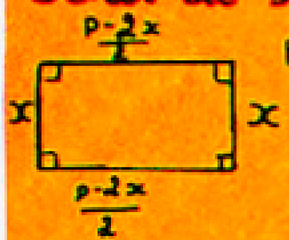
Et même chose en retirant A.

Carole, Corentin, Fanny, Hortense, Nolann.

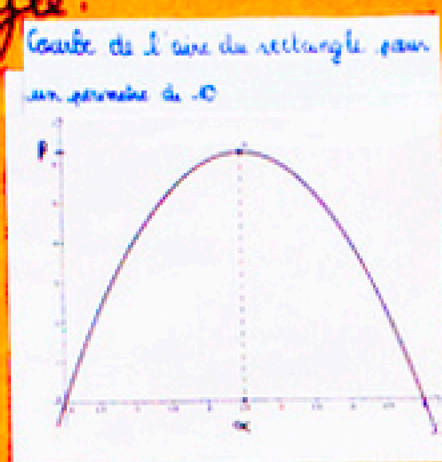
Le problème isopérimétrique

"Pour un périmètre donné quelle est la figure d'aire maximale ?"

Pour le rectangle :



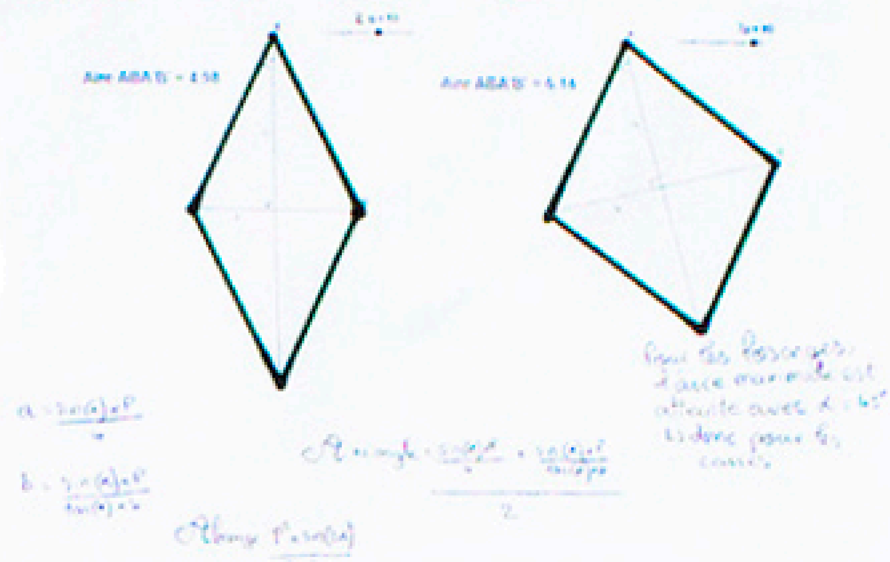
p : périmètre



On définit A(x) l'aire du rectangle $A(x) : x \times \frac{p-2x}{2}$

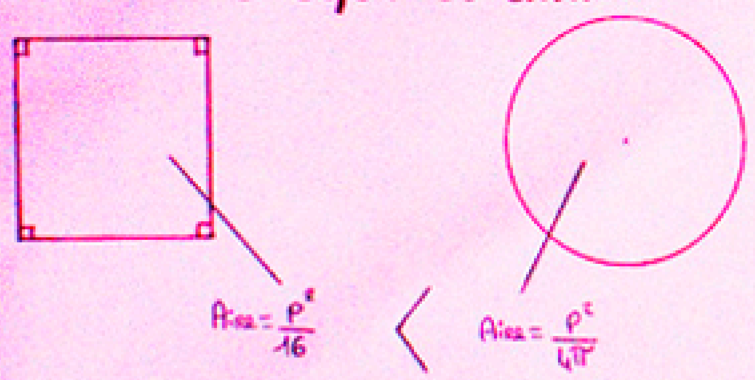
On voit que $x = \frac{1}{4}p$ donc le rectangle est un carré.

Pour les losanges



Pour les losanges, l'aire maximale est atteinte à $\alpha = 45°$

Disque et carré



Pour un périmètre donné, l'aire du disque est plus grande que celle du carré.

Conditions NECESSAIRES

① La figure doit être convexe : le segment joignant 2 pts quelconques d'une figure doit se trouver dans la figure.

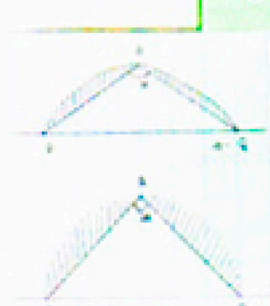
② Si l'on coupe le périmètre en deux, l'aire doit également être partagée de manière égale.

③ $\frac{AP \times AQ}{2} \times \sin \alpha$

$\frac{AP \times AQ}{2} \times 1$ (si $\alpha = 90°$)

=> Ainsi, lorsque les points P et Q séparent le périmètre en deux, pour tout point A du périmètre, le triangle APQ est d'aire maximale lorsqu'il est rectangle.

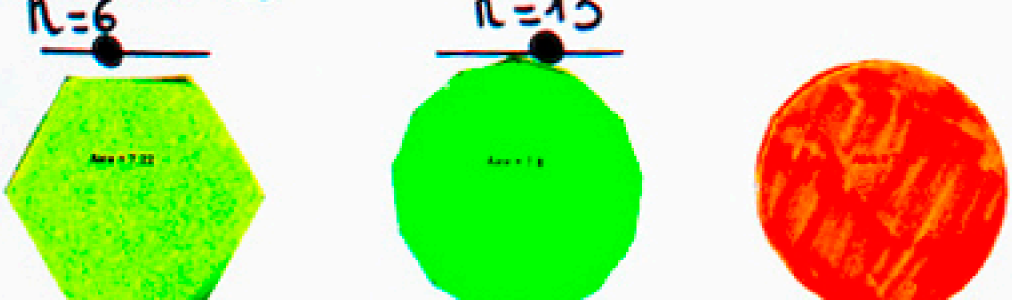
$\widehat{PQ}$ est donc un demi-cercle.



Les polygones réguliers et le disque

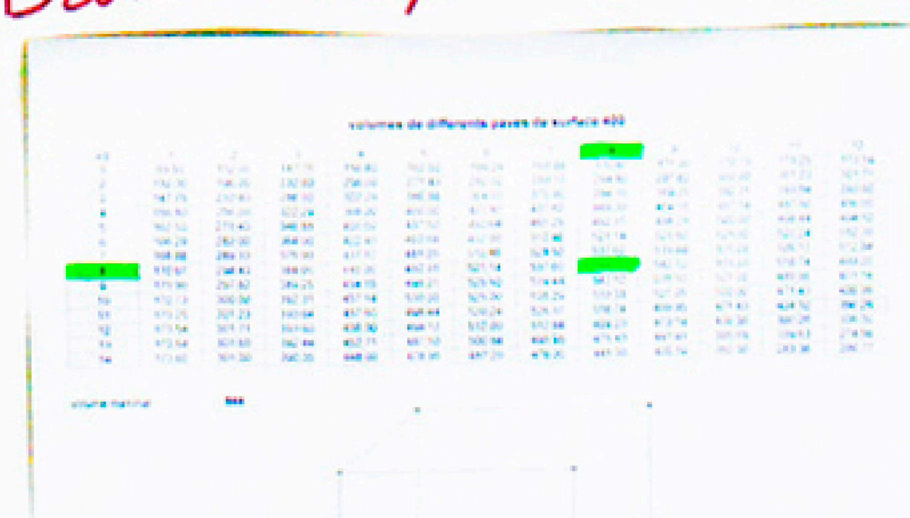
Polygones réguliers à n côtés de périmètre 10

disque de périmètre 10



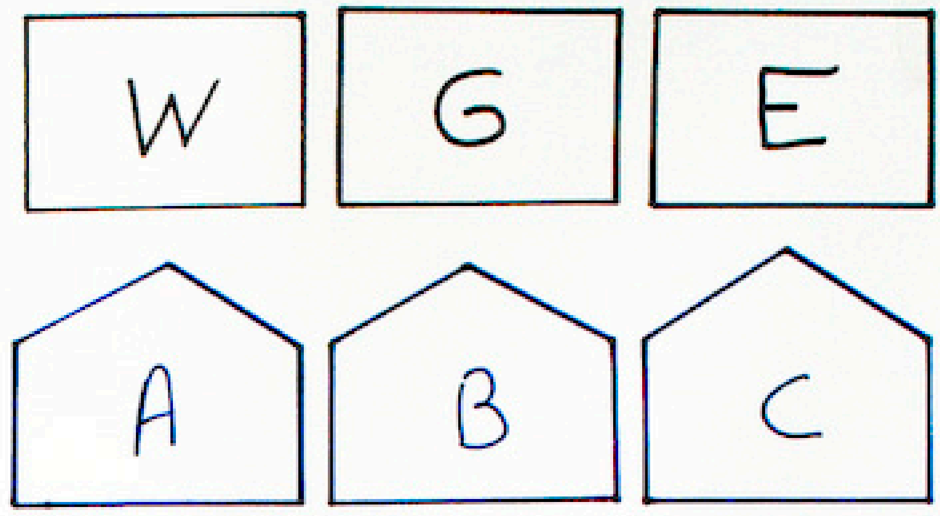
Lorsque l'on augmente le nombre de côtés d'un polygone régulier l'aire se rapproche de celle du disque de même périmètre.

Dans l'espace : Les Pavés



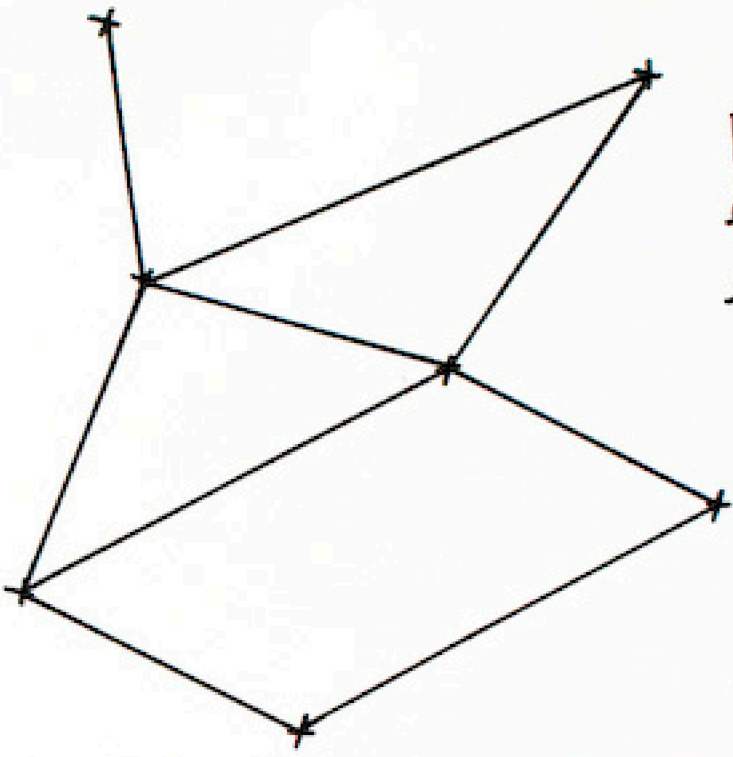
Pour les pavés de surface fixe le plus grand volume est atteint par le cube

Le problème des 3 maisons



Un graphe

Ensemble de points reliés entre eux par des arêtes qui ne se croisent pas et qui forment des régions.



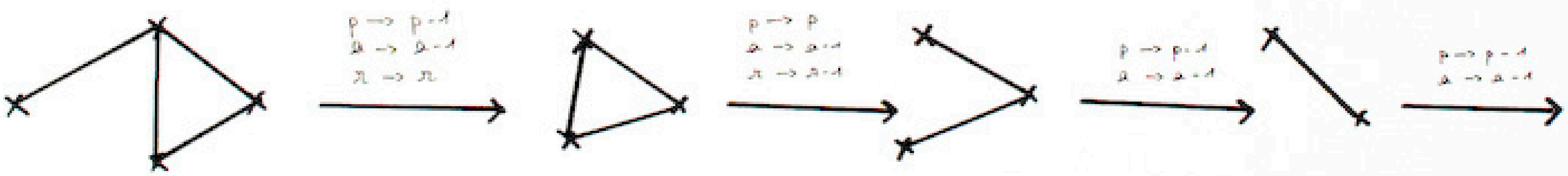
$p = 7$
$a = 9$
$r = 3$

Formule

$$\boxed{r = a - p + 1}$$

p = nombre de points
r = nombre de régions
a = nombre d'arêtes.

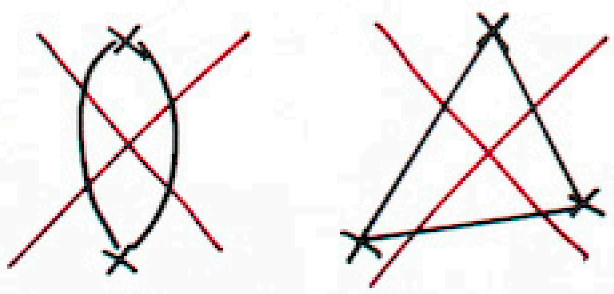
Démonstration : avec la démolition.



FIN
$p = 1$
$a = 0$
$r = 0$

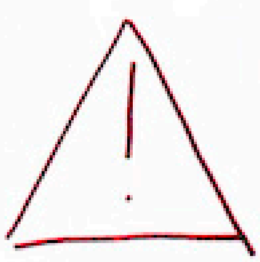
Résolution du problème.

Avec la formule : $p = 6$
$a = 9$
$r = 4$



$$a \geqslant \frac{4 \times 5}{2}$$

$$a \geqslant 10$$

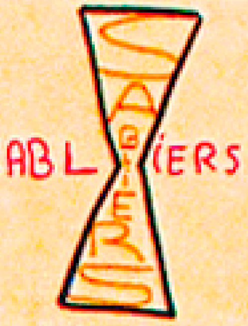


Impossible !

[illegible] [illegible]
Perrine Lutz
Estelle Dumast
Fabiola [illegible]

Goslin Charline
Lande Sarah
Benslama Selim

LA MESURE DU TEMPS AVEC 2 SABLIERS



Pâquet Mélanie
Gautier Margot

Attachés :

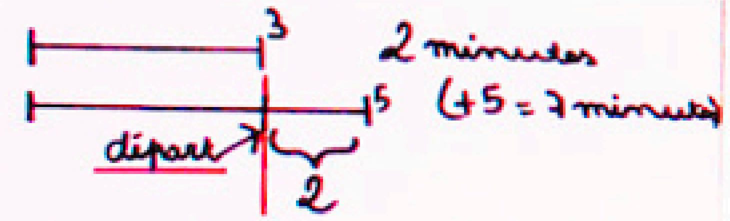
1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 ...

+3 +3

- On obtient tous les nombres à partir de 8 en utilisant les multiples de 3 et 5 ou en additionnant.

Forme générale : $5u + 3v$, $u \in \mathbb{N}$ et $v \in \mathbb{N}$

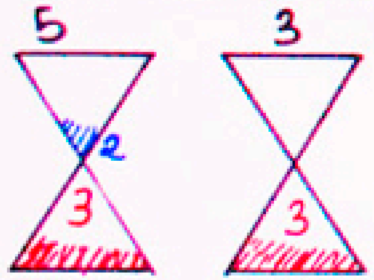
- On peut aussi soustraire en faisant un départ décalé.



- On peut donc mesurer 2 minutes et 7 minutes.

$5 - 3 = 2$
$2 + 5 = 7$

Lorsque l'on veut mesurer 1 minute en faisant 2-3 minutes.

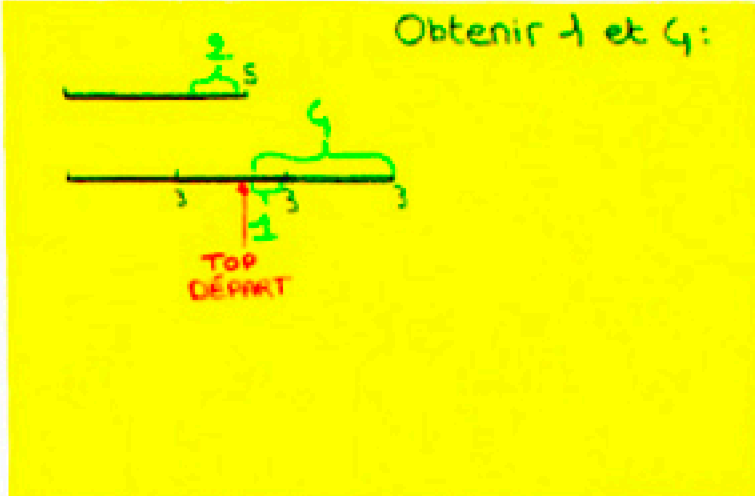


mais si on retourne, les deux sabliers se vident et on retourne au point de départ.

Autre forme :
$2 + 5u + 3v$, $u \in \mathbb{N}$, $v \in \mathbb{N}$

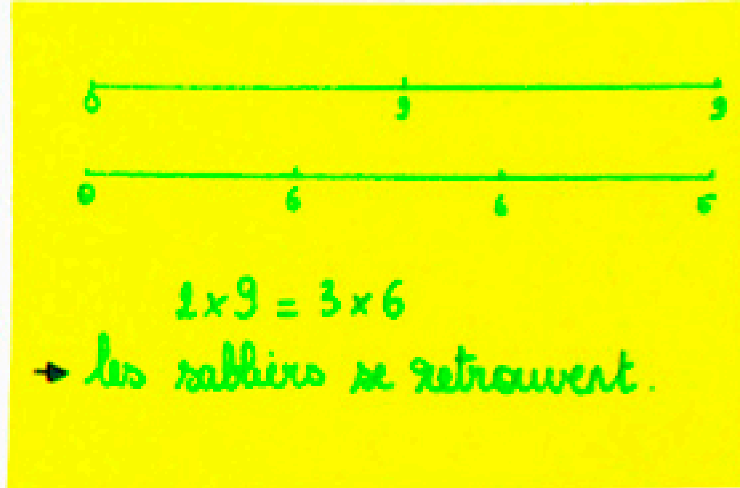
On peut donc tout calculer or mis 4 et 1.

Détachés



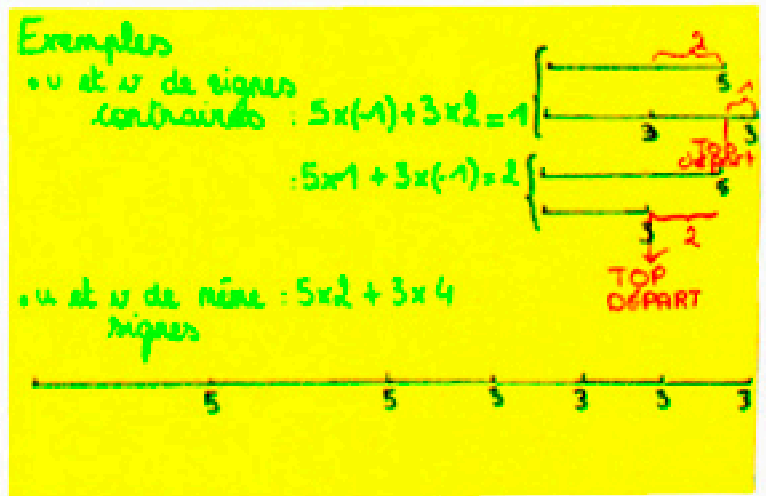
Remarque :

3 et 5 sont premiers entre eux.
→ On obtient tous les nombres.



Avec 6 et 9 on obtient seulement les multiples de 3.
→ Le PGCD ≠ 1

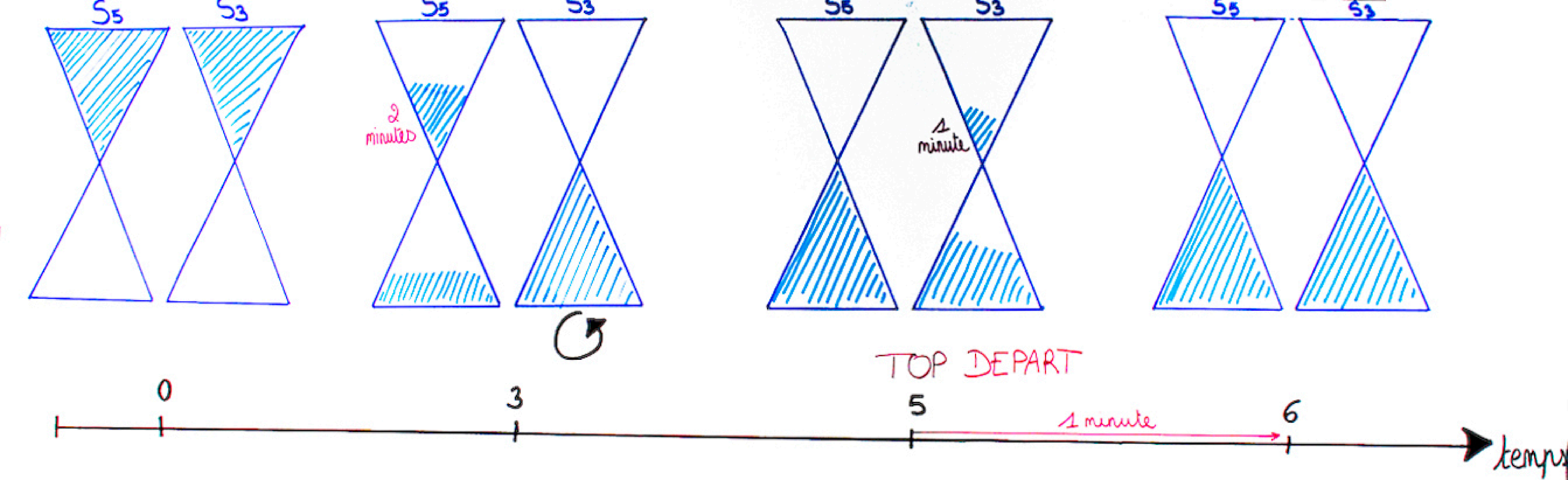
Forme générale :



$5u + 3v$
$u, v \in \mathbb{Z}$ et
$5u + 3v \geq 0$

u → nbr de fois que S_5 est retourné.

v → nbr de fois que S_3 est retourné.


S5
S3
S5
S3
2 minutes
S5
S3
1 minute
S5
S3
TOP DEPART
0
3
5
6
1 minute
temps

MESURE DU TEMPS AVEC 2 SABLIERS

pour aller + loin...

$v \backslash u$	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	5
-5	-40	-35	-30	-25	-20	-15	-10	-5	0	[illegible]	10
-4	-37	-32	-27	-22	-17	-12	-7	-2	3	8	13
-3	-34	-29	-24	-19	-14	-9	-4	[illegible]	6	11	16
-2	-31	-26	-21	-16	-11	-6	-1	4	9	14	19
-1	-28	-23	-18	-13	-8	-3	2	7	12	17	22
0	-25	-20	-15	-10	-5	0	[illegible]	10	15	20	25
1	-22	-17	-12	-7	-2	3	8	13	18	23	28
2	-19	-14	-9	-4	[illegible]	6	11	16	21	26	31
3	-16	-11	-6	-1	4	9	14	19	24	29	34
4	-13	-8	-3	2	7	12	17	22	27	32	37
5	-10	-5	0	[illegible]	10	15	20	25	30	35	40

Prenons exemple du temps $t = 5$:

* $u \geq 0$ et $v < 0 \rightarrow$ le temps total $T = 5u = 20$ mn
* u et $v \geq 0 \rightarrow T = 5u + 3v = 5$ mn
* $u < 0$ et $v \geq 0 \rightarrow T = 3v = 15$ mn

Il existe une méthode plus rapide pour mesurer un temps. Mais laquelle ?

Théorème de Bezout

Soient a et b deux entiers naturels non nuls alors il existe deux entiers u et v tels que $a \times u + b \times v = \mathrm{pgcd}(a,b)$

Définition :

Deux entiers naturels sont dits premiers entre eux lorsque leur pgcd est égal à 1.

Théorème :

Soient a et b deux entiers naturels non nuls, dire que a et b sont premiers entre eux équivaut à dire qu'il existe deux entiers u et v tels que

$$a \times u + b \times v = 1$$

avec des sabliers de temps a et b

Problème :

Toutes les écritures d'un nombre entier
Durée minimum pour obtenir un temps

Les entiers 5 et 3 sont premiers entre eux

on sait que pour tous les entiers t

Il existe u et v entiers tels que $5 \times u + 3 \times v = t$ (1)

$5 \times (-1) + 3 \times 2 = 1$ (2)

D'après (2) pour tout t entier $(5 \times (-1) + 3 \times 2) \times t = t$

$5 \times (-t) + 3 \times (2t) = t$ (3)

Exemple pour t = 19

$5 \times (-19) + 3 \times (38) = 19$ (3')

On suppose qu'il existe une autre solution $(u' ; v')$ telle que

$5 \times u' + 3 \times v' = 19$ (4)

(3') et (4) entraîne :

$5 \times u' + 3 \times v' = 5 \times (-19) + 3 \times (38)$

$5 \times u' - 5 \times (-19) = 3 \times (38) - 3 \times v'$

$5 \times (u' + 19) = 3 \times (38 - v')$ (5)

L'égalité n'est réalisée que lorsque

$(u' + 19)$ est multiple de 3
et $(38 - v')$ est multiple de 5

alors il existe k et k' des entiers tels que : $u' + 19 = 3 \times k$ (6)
$38 - v' = 5 \times k'$ (6')

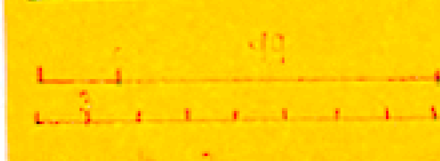
(5)) (6) (6') entraînent $5 \times 3 \times k = 3 \times 5 \times k'$ alors $k = k'$

alors $u' = -19 + 3 \times k$ $k \in \mathbb{Z}$ (entiers relatifs)
$v' = 38 - 5 \times k$

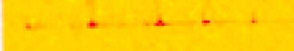
Recherche de la durée minimum pour obtenir 49.

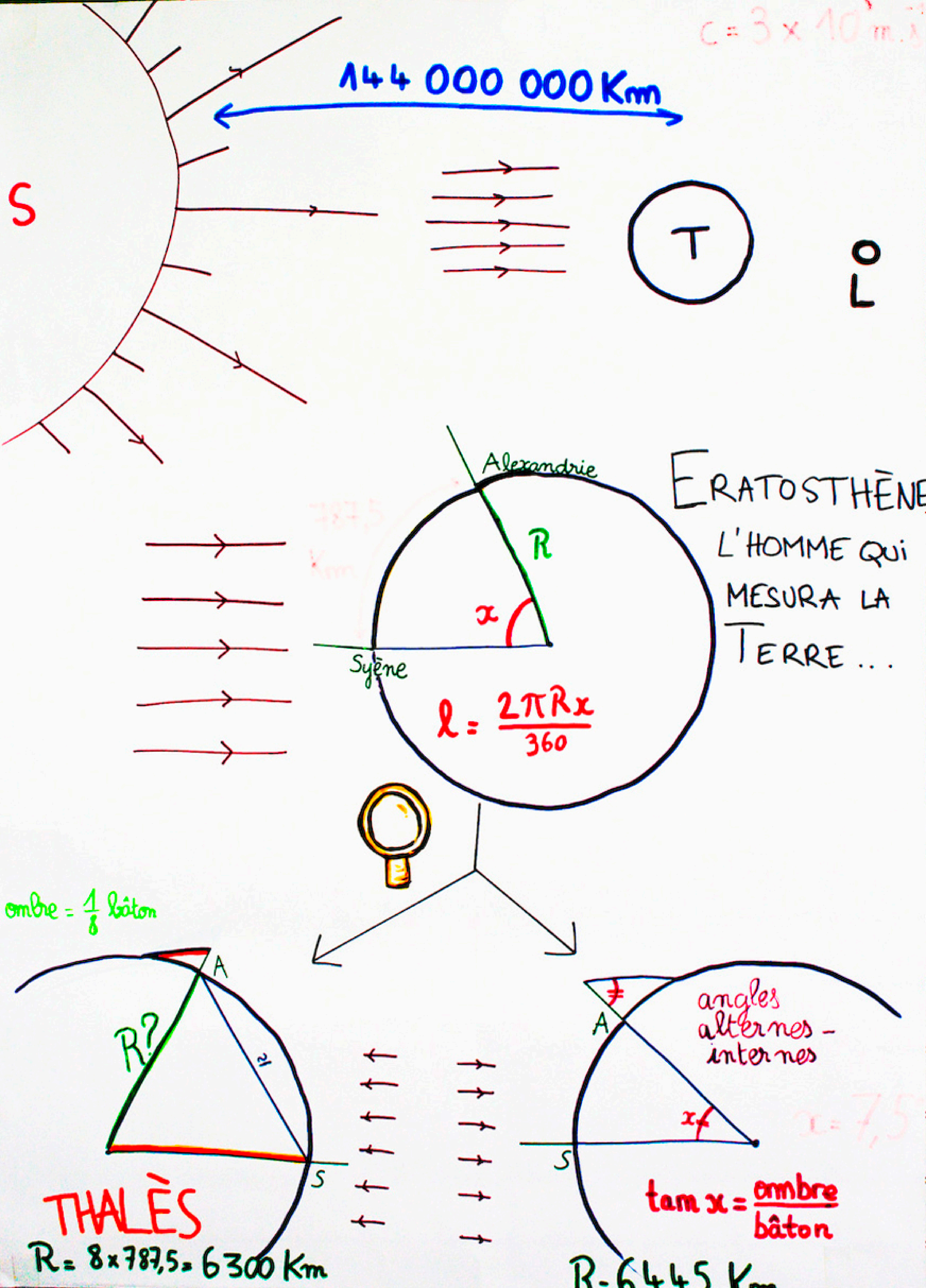
$$\begin{cases} u' = -49 + 3 \times k \\ \quad k \in \mathbb{Z} \text{ (entiers relatifs)} \\ v' = 38 - 5 \times k \end{cases}$$

pour k = 6 u' = -4 ... v' = 8



pour k = 7





144 000 000 Km
S
T
L
Alexandrie
R
x
Syène
ERATOSTHÈNE
L'HOMME QUI MESURA LA TERRE...
$l = \frac{2\pi R x}{360}$
ombre = $\frac{1}{8}$ bâton
A
R?
S
THALÈS
R = 8 × 787,5 = 6300 Km
A
≠
angles alternes-internes
x
S
$\tan x = \frac{\text{ombre}}{\text{bâton}}$
R = 6445 Km