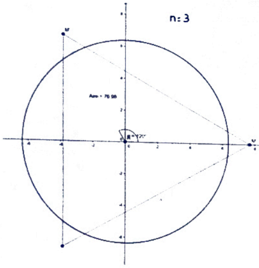
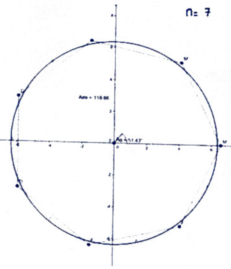
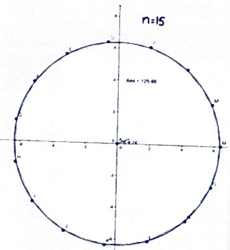
Problème Isopérimétrique

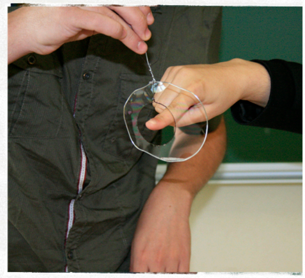
Adrien; Corentin; Marina; Simon et Solène.



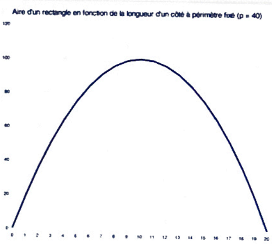




Film de savon



On plonge le film de fer avec une ficelle fermée à l'intérieur. Quand on perce le film de savon dans la ficelle, cette dernière prend la forme d'un cercle parfait car l'énergie du film étant proportionnelle à son aire, le moyen de minimiser l'énergie du film est de rétrécir son aire au maximum. Or pour un périmètre fixe, le cercle est le polygone ayant la plus grande aire.



Cette courbe montre l'aire d'un rectangle de périmètre 40cm en fonction de la longueur d'un des côtés on voit que parmi ces rectangles c'est le carré qui a le plus grande aire.

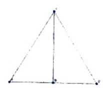
Champs circulaires en Jordanie, pour optimiser l'arrosage.

Cercle de périmètre 40 cm :
rayon = $40/2\pi$
Aire = $\pi\,(40/2\pi)^2$
= $400/\pi$

Aire ≈ 127,32 cm²

Comparaison des aires des principaux **polygones réguliers** pour un périmètre donné a savoir 40 cm :

Triangle équilatéral ADC :
côté = 40/3 cm



calcul de la hauteur :
Théorème de Pythagore dans le triangle ABC

$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$(40/3)^2 = AB^2 + (20/3)^2$
$AB^2 = 1600/9 - 400/9$
$AB^2 = 1200/9$
$AB = 20\sqrt{3}/3$
$AB = h$

Aire = B * h /2
= $[40/3 * 20\sqrt{3}/3]/2$
= $800\sqrt{3}/18$
= $400\sqrt{3}/9$
≈ 76.98 cm²

Carré :
côté = 40/4 = 10 cm
Aire = 100 cm²

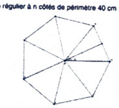
Fonction pour trouver l'Aire A(n) du polygone régulier à n côtés de périmètre 40 cm :

Aire de l'un des n triangles isocèles :

Aire = B * h /2
Aire = [40/n * (20/n) / tan (180°/n)] /2

Aire totale du polygone :
A(n) = n * [40/n * (20/n) / tan (180°/n)] /2

A(n) = 400/[n*tan (180°/n)]



Observons la table de valeurs ci-contre :

Conjectures :

Plus un polygone régulier de périmètre fixé a de sommets, plus son aire est grande.
Le cercle a la plus grande aire pour un même périmètre (40cm).

nombre de côtés n	aire du polygone de périmètre 40 cm (en cm²)
3	76,98
4	100
5	110,11
6	115,47
7	118,66
8	120,71
9	122,11
10	123,11
11	123,84
12	124,4
13	124,84
14	125,18
15	125,46
16	125,68
17	125,87
18	126,03
19	126,16
20	126,28
21	126,37
22	126,46
23	126,53

aire du cercle de périmètre 40 cm (en cm²)
127,32

Raisonnement pat l'absurde

Conjecture: Parmi toutes ces figures de périmètre fixé, le cercle est celle qui a la plus grande aire.

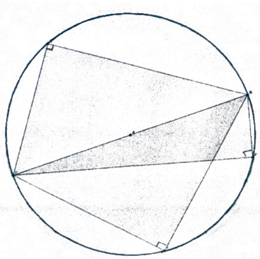
Piste: Supposer qu'il existe une figure d'aire maximale et de périmètre fixé et montrer que c'est un cercle.

On utilise une des **propriétés caractéristiques du cercle**.
Si un segment [AB] partage une figure en deux de sorte que pour tout point (sur le bord de la figure), **le triangle ABC est rectangle alors la figure est un cercle.**

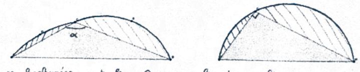
On montre qu'une figure avec un périmètre fixé d'aire maximale a la propriété précédente.

On suppose que la figure ne possède pas cette propriété et on arrive à la conclusion qu'elle **ne peut être** d'aire maximale (*c'est un raisonnement par l'absurde*).

Pour que l'aire soit maximale, cette figure est un cercle.



On a représenté la moitié de notre figure, que l'on suppose d'aire maximale.



Les zones hachurées sont les mêmes sur les deux figures.
La longueur verte est la même sur les deux figures.
Si l'angle α n'est pas droit, la deuxième figure a une aire strictement plus grande que la première, qui n'est donc pas d'aire maximale. C'est impossible, donc α = 90°, pour n'importe quel choix de C sur le bord de la figure

Les Parages

Tous les polygones réguliers peuvent-ils paver le plan ?

Démarches scientifiques :

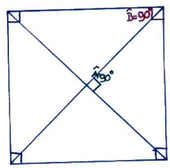
→ Identification des polygones réguliers de 3 à 12 côtés :

$n=3$ → Triangle Équilatéral
$n=4$ → Carré
$n=5$ → Pentagone
$n=6$ → Hexagone
$n=7$ → Heptagone
$n=8$ → Octogone
$n=9$ → Nonagone
$n=10$ → Décagone
$n=11$ → Hendécagone
$n=12$ → Dodécagone

→ Relation entre l'angle au centre et le nombre de côtés:

$$\boxed{\hat{A} = \frac{360}{n}}$$

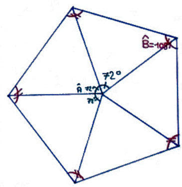
Avec : $\hat{A}$: Angle au centre
n : nombre de côtés



→ Relation entre l'angle au sommet et le nombre de côtés:

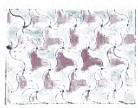
$$\boxed{\begin{aligned}\hat{B} &= 180 - \hat{A}\\ &= 180 - \frac{360}{n}\end{aligned}}$$

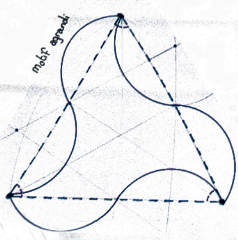
Avec : $\hat{B}$: Angle au sommet
n : nombre de côtés



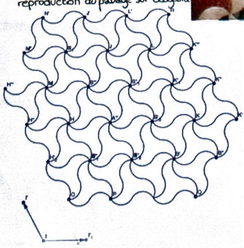
→ Propriété : Pour qu'un polygone régulier d'angle au sommet : $\hat{B} = 180 - \frac{360}{n}$, puisse paver un plan, il faut que la division de 360 par $\hat{B}$ soit un entier naturel.

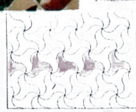
→ Pavage de l'Alhambra :





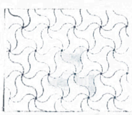
reproduction du pavage sur Geogebra





le motif peut être reproduit par translation

ou



rotation

Conclusion

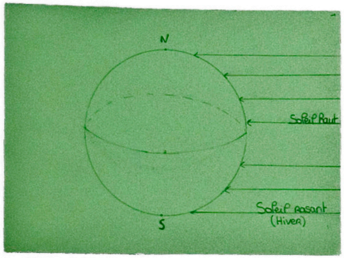
Il n'y a que le triangle ($n=3$), le carré ($n=4$), et l'Hexagone ($n=6$) qui pavent le plan.

Terre : Plate ou Ronde ?

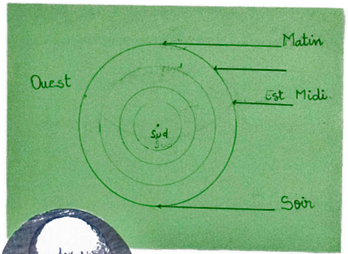
I - Grecs : ~~plate~~ - Ronde

A - Sans fusée, sans satellite ..., comment deviner qu'elle est ronde ?

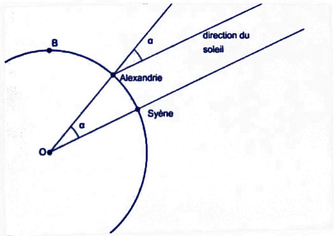
× Courbure Nord-Sud = la hauteur du Soleil à midi



× Courbure Est - Ouest = le décalage horaire



B - La mesure d'Eratosthène



Les résultats d'Eratosthène

$\alpha = \frac{1}{50^e}$ de cercle

$\overline{AS} = 50\,000$ stades

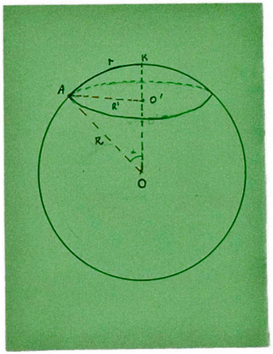
donc le méridien mesure 250 000 stades

Il paraît que le stade mesure 157,50 m.

250 000 stades = 39 375 Km.

II - Lézards plats : ~~plate~~ ronde

Comment des lézards plats n'ayant aucune idée de la 3^e dimension, vivant sur la Terre pourraient-ils savoir que la terre est ronde ?



En traçant à la surface de la terre, un cercle de rayon r, on obtient un cercle de rayon :

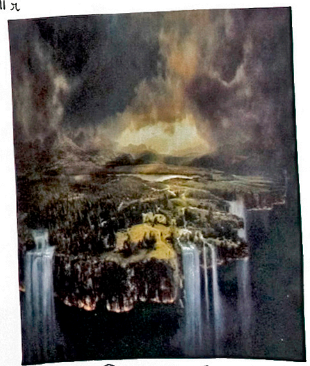
$R' = R \sin(\widehat{AOK}) = R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$

La circonférence mesure : $2\pi R' = 2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$

Si la Terre était plate, cette circonférence mesurerait $2\pi r$

× Quelques valeurs :

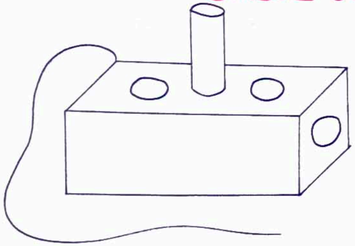
r (en Km)	$2\pi r$ (terre plate)	$2\pi R \sin\left(\frac{r}{R}\right)$ (terre ronde)	erreur relative
100	628	628	0,02 %
1000	6283	6257	0,41 %
5000	31 415	28 284	9,97 %
10 000	62 831	40 000	36 %

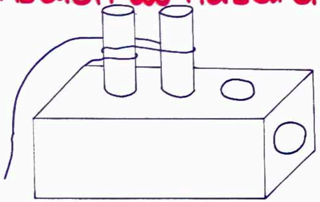


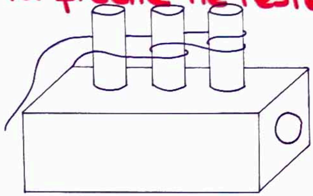
Groupe n° 3.

Jeux De ficelle

But : enrouler la ficelle autour des bâtons de sorte à ce que lorsqu'on enlève un bâton au hasard, la ficelle ne reste pas accrochée.







1 Bâton.

+ : Lorsque la ficelle fait le tour d'un bâton dans le sens des aiguilles d'une montre.
— : Lorsque la ficelle fait le tour d'un bâton dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Si la ficelle fait autant de + que de — alors cela revient à ne faire aucun tour.

2 Bâtons.

On entoure la ficelle avec 2 bâtons en faisant autant de ⊕ que de ⊖ sur chacun des bâtons de sorte que si on en enlève un au hasard, la ficelle ne reste pas accrochée.

Exemple : = 1-, 2+, 2+, 1+, 2-, 2-, 1+, 2-, 1-, 2+.

Bâton 1 : Deux ⊕ ; Deux ⊖ = Autant ⊕ que ⊖

Bâton 2 : Trois ⊖ ; Trois ⊕ = Autant ⊕ que ⊖

3 Bâtons

Une solution, pour le cas de 3 bâtons, doit avoir autant de + que de moins sur chaque bâton mais cela ne suffit pas :

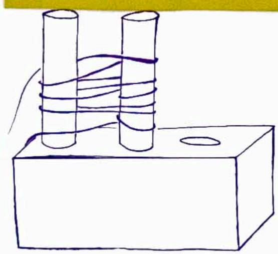
1-, 2-, 1+, 3+, 2+, 3-.

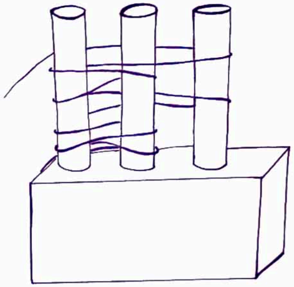
Il y a autant de + que de - mais si on enlève le bâton 3, la ficelle restera bloquée autour d'un bâton.

Pour savoir si un enroulement est une solution, on écrit la suite des mouvements effectués pour réaliser cet enroulement. Enlever un bâton revient à supprimer le numéro du bâton correspondant dans la suite. Après cela, on pourra éventuellement simplifier la suite : Par exemple, si 3- et 3+ se suivent alors cela revient à supprimer les tours comme dans l'exemple avec 1 seul bâton.
Après avoir fait toutes les simplifications nécessaires et possibles, si il ne reste plus aucun nombre, alors la solution est vraie.

On représente la suite des mouvements :
1+ : la ficelle fait un tour autour du bâton n°1 dans le sens des aiguilles d'une montre.
2- : la ficelle fait un tour autour du bâton n°2 dans le sens inverse des aiguilles d'une montre.

Exemple pour 3 bâtons :
3-, 1+, 3+, 1-, 2+, 1+, 3-, 1-, 3+





Exemple de Mouvements

2+, 1-, 2-, 1+, 3+, 1-, 2+, 1+, 2-, 3-

Si on enlève le bâton 1	Si on enlève le bâton 2.	Si on enlève le bâton 3
2+, 2-, 3+, 2+, 2-, 3-	1-, 1+, 3+, 1-, 1+ 3-	2+, 1-, 2-, 1+, 1- 2+, 1+, 2-
3+, 3-	3+, 3-	2+, 1-, 2-, 2+, 1+, 2-
		2+, 1-, 1+ 2-
		2+, 2-
Les opposés s'annulent	Les opposés s'annulent	Les opposés s'annulent

Et comme tout s'annule, la ficelle se démêle.

groupe 4