

Analyse d'un modèle de Réaction-Diffusion pour un système prédateur-proie en milieu insulaire hétérogène.

S. Gaucel, M. Langlais et D. Pontier

GdT « Application des mathématiques ». ENS Cachan, Rennes.

15 octobre 2008



Parcours

Formation initiale

- Formation en mathématiques généraliste solide
 - Maîtrise Mathématiques Appliquées, Univ. Grenoble 1
 - DEA Mathématiques Appliquées et Calcul Scientifique, Univ. Bordeaux 1

Recherche : Modélisation et analyse mathématique



Doctorat : Dynamique des populations
Prédateur–Proie



Postdoc MIAJ : Épidémiologie animale.



Postdoc BIOGER : Épidémiologie des plantes.
Contournement de résistances.



Postdoc épidémiologie des plantes

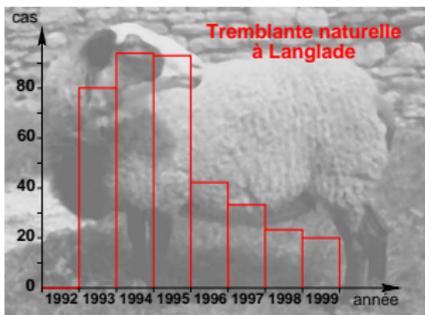


- Contournement/Durabilité des résistances.
- Pathosystème : Rouille brune du blé

Cadre de l'étude

- Pas de mutant dans le background génétique
- Influence des structures spatiales locales (feuille/foyer d'infection)
- Succès d'installation du mutant (apparition + non-extinction)

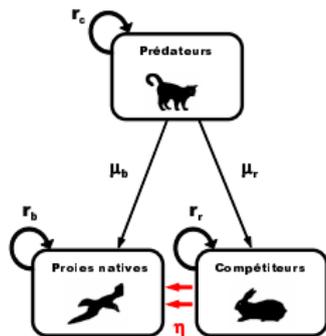
Postdoc épidémiologie animale



Cadre de l'étude

- Modélisation de la transmission de la tremblante du mouton :
 - échelle troupeau
 - échelle région d'élevage
- Introduction de nouvelles hypothèses sur la transmission
- Simplification/Couplage de modèles

Doctorat : Interactions Prédateurs-Proies



Cadre de l'étude

- Analyse théorique et numérique de modèles spatio-temporels
- Systèmes de Réaction-Diffusion
- Hétérogénéités spatiales
- Persistance vs Extinction en temps fini

Introduction

Motivation

Modéliser et étudier les phénomènes d'extinction en temps fini d'une ou plusieurs populations dans un écosystème évoluant en milieu fermé spatialement hétérogène

Problématique Biologique

- Introduction d'espèces invasives (prédateurs et/ou compétiteurs) dans un écosystème stable
- Ecosystème considéré : Archipel des Kerguelen (interactions Chats-Lapins-Oiseaux)

Hypothèses de travail

- Échelle des populations
- Cadre déterministe
- 2 variables structurantes continues : temps et espace
- Modèles minimaux

Méthodologie

- Analyse de stabilité
- Extinction en temps fini vs Persistence
- Dynamique en temps long
- Dynamiques périodiques/oscillatoires
- Validation numérique

Méthodologie

- Analyse de stabilité
- Extinction en temps fini vs Persistence
- Dynamique en temps long
- Dynamiques périodiques/oscillatoires
- Validation numérique

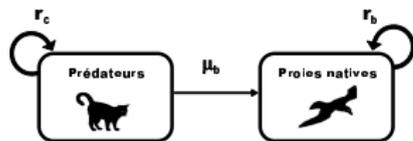
Applications

- Prédiction du devenir des écosystèmes insulaires/fermés
- Conservation de la bio-diversité
- Archipel des Kerguelens



Modèles faiblement structurés

Modèle prédateur-proie (BC)



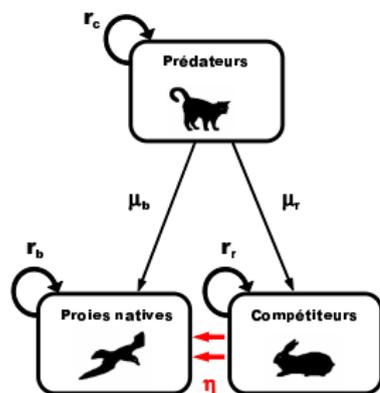
- F. Courchamp et G. Sugihara
- Système d'EDO singulier
- Croissance logistique + ratio-dépendance
- r_b, r_c : taux de croissance
- μ_b : taux de prédation
- K : capacité d'accueil du milieu

Modèle mathématique

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = r_b B \left(1 - \frac{B}{K}\right) - \mu C, & B(0) = B_0 > 0 \\ \frac{dC}{dt} = r_c C \left(1 - \frac{\mu C}{B}\right), & C(0) = C_0 > 0 \end{cases}$$



Modèle prédateur-compétiteur-proie (BRC)



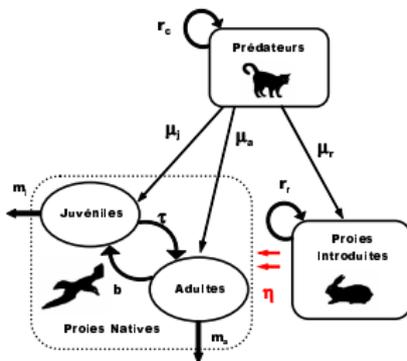
- F. Courchamp, M. Langlais et G. Sugihara
- Hyp. bio. : prédateur opportuniste
naïveté des proies natives (α)
compétition asymétrique (η)
- r_b , r_r et r_c : taux de croissance
- μ_b , μ_r : taux de prédation
- K_b , K_r : capacités d'accueil du milieu

Modèle mathématique

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dB}{dt} = r_b B \left(1 - \frac{B}{K_b} \right) - \eta BR - \frac{\alpha B}{\alpha B + R} \mu_b C, \quad B(0) = B_0 > 0 \\ \frac{dR}{dt} = r_r R \left(1 - \frac{R}{K_r} \right) - \frac{R}{\alpha B + R} \mu_r C, \quad R(0) = R_0 > 0 \\ \frac{dC}{dt} = r_c C \left(1 - \mu_r \mu_b \frac{C}{\mu_r B + \mu_b R} \right), \quad C(0) = C_0 > 0 \end{array} \right.$$



- Hypothèse supplémentaire : différenciation de la prédation sur les proies natives
- Objectif : déterminer l'impact d'une prédation âge dépendante sur une population longévive de proies natives



- Classes d'âges pour les proies natives
- Préférence des prédateurs pour une des classes d'âges



Passage du modèle BC ..

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = r_b B \left(1 - \frac{B}{K}\right) - \mu C, & B(0) = B_0 > 0 \\ \frac{dC}{dt} = r_c C \left(1 - \frac{\mu C}{B}\right), & C(0) = C_0 > 0 \end{cases}$$

.. au modèle JAC.

$$\begin{cases} \frac{dJ}{dt} = bA - (m_j + k_j(A + J))J - \tau J - \mu_j C \frac{\gamma J}{\gamma J + A}, & J(0) > 0, \\ \frac{dA}{dt} = \tau J - (m_a + k_a(A + J))A - \mu_a C \frac{A}{\gamma J + A}, & A(0) > 0, \\ \frac{dC}{dt} = r_c \left(1 - \mu_a \mu_j \frac{C}{\mu_j A + \mu_a J}\right) C, & C(0) > 0. \end{cases}$$



De la même manière, on obtient le modèle JARC

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dJ}{dt} = bA - (m_j + k_j(A + J))J - \tau J - \eta_j R J - \mu_j C \frac{\gamma \alpha J}{\alpha(\gamma J + A) + R}, \\ \frac{dA}{dt} = \tau J - (m_a + k_a(A + J))A - \eta_a R A - \mu_a C \frac{\alpha A}{\alpha(\gamma J + A) + R}, \\ \frac{dR}{dt} = r_r \left(1 - \frac{R}{K_r} \right) R - \mu_r C \frac{R}{\alpha(\gamma J + A) + R}, \\ \frac{dC}{dt} = r_c \left(1 - \frac{\mu_a \mu_j \mu_r C}{\mu_j \mu_r A + \mu_a \mu_r J + \mu_a \mu_j R} \right) C \end{array} \right.$$



Remarque

Ces modèles ne permettent pas de reproduire l'ensemble des dynamiques observées.



Remarque

Ces modèles ne permettent pas de reproduire l'ensemble des dynamiques observées.

⇒ structuration spatiale.



Modèle avec structuration spatiale

- Systèmes d'EDP singuliers du type Réaction-Diffusion
- Système biologique fermé (conditions de Neumann)
- Diffusion isotrope
- Hétérogénéités spatiales



$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = r_b B \left(1 - \frac{B}{K}\right) - \mu C, & B(0) = B_0 > 0 \\ \frac{dC}{dt} = r_c C \left(1 - \frac{\mu C}{B}\right), & C(0) = C_0 > 0 \end{cases} \quad (1)$$

$$\begin{cases} \partial_t B - d_b \Delta B = r_b(x) \left(1 - \frac{B}{K_b(x)}\right) B - \mu_b(x) C, \\ \partial_t C - d_c \Delta C = r_c(x) \left(1 - \mu_b(x) \frac{C}{B}\right) C, \end{cases} \quad (2)$$

+ conditions au bord $\partial\Omega$ de Ω de type Neumann

+ conditions initiales positives et bornées

$$P(x, 0) = P_0(x) \geq 0, \quad \text{pour } P = B, C, \quad x \in \Omega.$$

Analyse du modèle 1

$$\begin{cases} \frac{dB}{dt} = r_b B \left(1 - \frac{B}{K}\right) - \mu C, & B(0) = B_0 > 0 \\ \frac{dC}{dt} = r_c C \left(1 - \frac{\mu C}{B}\right), & C(0) = C_0 > 0 \end{cases}$$

États stationnaires

- $(0, 0)$?
- $(K, 0)$ toujours instable.
- $(B^* = \frac{r_b - 1}{r_b} K, C^* = \frac{B^*}{\mu})$ existe pour $r_b > 1$, stable ssi $r_b + r_c > 2$

Changement de variables

Passage en (B, P) avec $P = \frac{C}{B}$.

$$\begin{cases} B' = [r_b(1 - \frac{B}{K}) - \mu P] B, & B(0) = B_0 > 0, \\ P' = [r_c - r_b + r_b \frac{B}{K} - \mu(r_c - 1)P] P, & P(0) = \frac{C_0}{B_0} > 0. \end{cases} \quad (3)$$

- Positivité
- Existence d'une solution maximale sur $(0, T_{\max}(B_0, P_0))$.
- $0 \leq B(t) \leq \max(B_0, K)$:
 1. $T_{\max}(B_0, P_0) = +\infty$ (existence globale).
 2. $T_{\max}(B_0, P_0) < +\infty$ (P explose en temps fini).

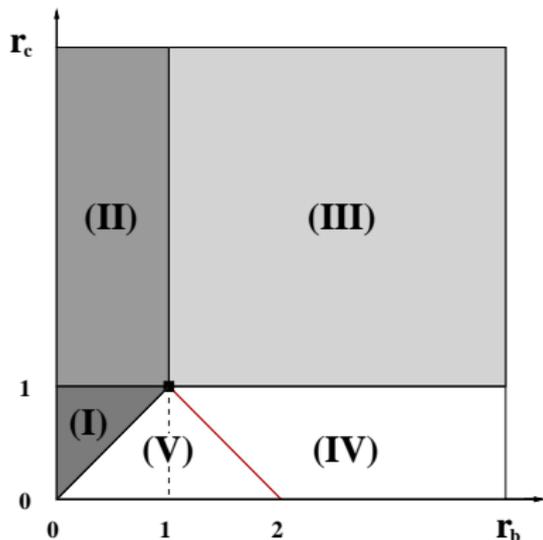
Remarque

$P' = \alpha(t)P + \mu(1 - r_c)P^2$ avec $\alpha(t) = r_c - r_b + r_b \frac{B(t)}{K}$.

$\Rightarrow r_c < 1$ CN pour avoir explosion de P en temps fini.

$(B(t), C(t)) \rightarrow (0, 0)$ quand $t \nearrow T_{\max}(B_0, P_0)$

Dynamique du modèle 1



(I) Pas de solution définie sur \mathbb{R}^+ .
Extinction en temps fini des populations.

(II) $(0, P^{**} = \frac{1}{\mu} \frac{r_c - r_b}{r_c - 1})$ GAS. Extinction asymptotique.

(III) (B^*, P^*) GAS. Coexistence stable en temps des populations.

(IV) Dynamique C.I. dépendante : extinction en temps fini ou coexistence stable des populations.

(V) Extinction en temps fini des populations.



Arguments des preuves

- Comparaison avec des solutions d'EDO particulières.
- État stationnaire GAS.

Zone I

- $0 \leq z_-(t) \leq P(t)$ avec z_- solution de

$$z' = (r_c - r_b - \mu(r_c - 1)z)z, \quad z(0) = P_0 > 0,$$

- $T_{\max}(B_0, P_0) < +\infty$ et $P(t) \rightarrow +\infty$ quand $t \nearrow T_{\max}(B_0, P_0)$
- Intégration $\Rightarrow \int_0^t P(\tau) d\tau \rightarrow +\infty$ quand $t \nearrow T_{\max}(B_0, P_0)$.

$\Rightarrow (B(t), C(t)) \rightarrow (0, 0)$ quand $t \nearrow T_{\max}(B_0, P_0)$.

Zones II et III

- Existence globale pour $r_c > 1$.

($0 \leq P(t) \leq z(t)$ avec z solution, bornée, de

$$z'(t) = (r_c + r_b + \frac{r_b}{K} B_{\text{sup}})z(t) - \mu(r_c - 1)z^2(t), \quad z(0) = P_0$$

- Zone II : $(0, P^{**})$ GAS pour (3).

$(B(t), C(t) = B(t) \cdot P(t)) \rightarrow (0, 0)$.

- Zone III : (B^*, P^*) GAS pour (3) donc (B^*, C^*) GAS pour (1).

$\mathcal{L}_{III}(B, P) = \frac{r_b}{K} [B - B^* - B^* \ln \frac{B}{B^*}] + \mu [P - P^* - P^* \ln \frac{P}{P^*}]$ fonction de Liapunov.

Zone IV

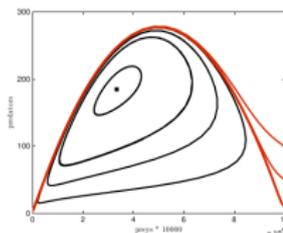
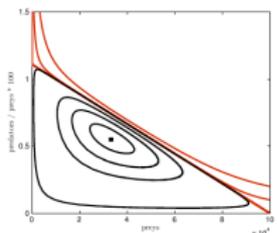
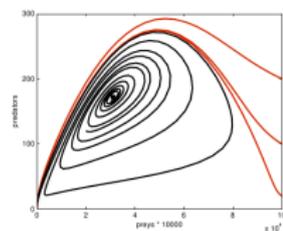
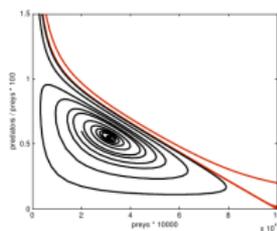
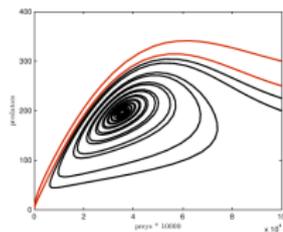
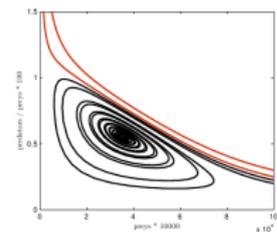
- Pour $r_c < 1$ et $P_0 > P^{**}$, on a explosion en temps fini de P .
- $\mathcal{T}_{(B,P)}^- = \{(B, P), B \geq 0, P \geq 0, \frac{1}{K}B + \frac{1}{P^{**}}P - 1 \leq 0\}$.

$\mathcal{T}_{(B,P)}^-$ est positivement invariant en temps.

(B^*, P^*) LAS.

Zone V, et frontières ...

Gaucel, S. , Langlais, M. (2007) *Some remarks on a singular reaction-diffusion system arising in predator-prey modeling*. Discrete and continuous dynamical systems-series B. Vol 8, Number 1, July 2007



- Zone IV
- $r_b = 1.55$, $r_c = 0.5$, $\mu = 180$ et $K = 100000$.
- Le triangle $(0, 0)$, $(K, 0)$, $(0, P^{**})$ est positivement invariant.
- Zone V. $r_b = 1.45$, $r_c = 0.5$.
- L'extérieur du triangle $(0, 0)$, $(K, 0)$, $(0, P^{**})$ est positivement invariant.
- $r_b + r_c = 2$.
- $r_b = 1.5$, $r_c = 0.5$.
- Le segment $(K, 0)$, $(0, P^{**})$ délimite 2 régions positivement invariantes.

Approximations numériques du modèle BC

Systèmes approchés

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dB}{dt} = r_b B \left(1 - \frac{B}{K} \right) - \mu C \frac{B}{B + \delta}, \quad B(0) = B_0 > 0 \\ \frac{dC}{dt} = r_c C \left(1 - \frac{\mu C}{B} \frac{B}{B + \varepsilon} \right), \quad C(0) = C_0 > 0 \end{array} \right.$$

Inconvénients

1. Élimination de la singularité.
⇒ Sur-estimation des cas d'explosion.
2. Modification du terme de prédation.
⇒ Sous-estimation des cas d'explosion.
3. (1+2) Pas d'extinction en temps fini.

Analyse de 2

$$\begin{cases} \partial_t B - d_b \Delta B = r_b(x) (1 - B/K_b(x)) B - \mu_b(x) C, \\ \partial_t C - d_c \Delta C = r_c(x) \left(1 - \mu_b(x) \frac{C}{B}\right) C, \end{cases} \quad (4)$$

+ Condition de Neumann et $CI \geq 0$.

Hypothèse (H1)

(H1) Paramètres constants et strictement positifs. Ω un domaine borné de R^n , de frontière $\partial\Omega$ régulière.

Hypothèse (H2)

(H2) $0 < \delta \leq B_0(x) \leq \|B_0\|_{\infty, \Omega} < \infty$, et
 $0 < \delta \leq C_0(x) \leq \|C_0\|_{\infty, \Omega} < \infty$.

Existence locale et unicité

Introduction de fonctions tronquées :

$$f_\varepsilon : (-\infty, +\infty) \rightarrow [0, +\infty)$$
$$z \quad f_\varepsilon(z) = \begin{cases} 1/z & z \geq \varepsilon, \\ 1/\varepsilon & z \leq \varepsilon. \end{cases} \quad (5)$$

et des problèmes auxiliaires associés

$$\begin{cases} \partial_t B - d_b \Delta B = r_b \left(1 - \frac{B}{K}\right) B - \mu C, \\ \partial_t C - d_c \Delta C = r_c (1 - \mu f_\varepsilon(B) C) C, \end{cases} \quad (6)$$

Existence et unicité d'une solution $(B_\varepsilon, C_\varepsilon)$ sur le cylindre $[0, T_{\max}(\varepsilon, B_0, C_0)) \times \bar{\Omega}$.

Si $0 < \varepsilon < \delta$ avec **(H2)** vérifiée, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que

$$0 < \varepsilon \leq B_\varepsilon(x, t), \quad 0 \leq t \leq T_\varepsilon, \quad x \in \Omega. \quad (7)$$

Et on obtient une solution au problème (2) sur un cylindre $(0, T_\varepsilon) \times \Omega$ telle que

$$0 < \varepsilon \leq B_\varepsilon(x, t) \leq \max(\|B_0\|_{\infty, \Omega}, K), \quad 0 \leq t \leq T_\varepsilon, \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Question

- $T_\varepsilon \rightarrow +\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$?

Existence et unicité d'une solution $(B_\varepsilon, C_\varepsilon)$ sur le cylindre $[0, T_{\max}(\varepsilon, B_0, C_0)) \times \bar{\Omega}$.

Si $0 < \varepsilon < \delta$ avec **(H2)** vérifiée, il existe $T_\varepsilon > 0$ tel que

$$0 < \varepsilon \leq B_\varepsilon(x, t), \quad 0 \leq t \leq T_\varepsilon, \quad x \in \Omega. \quad (7)$$

Et on obtient une solution au problème (2) sur un cylindre $(0, T_\varepsilon) \times \Omega$ telle que

$$0 < \varepsilon \leq B_\varepsilon(x, t) \leq \max(\|B_0\|_{\infty, \Omega}, K), \quad 0 \leq t \leq T_\varepsilon, \quad x \in \Omega. \quad (8)$$

Question

- $T_\varepsilon \rightarrow +\infty$ quand $\varepsilon \rightarrow 0$?
- Utilisation des résultats obtenus sur le système BC non spatial.

Passage en $P(x, t) = \frac{C(x, t)}{B(x, t)}$

$$\begin{cases} \partial_t B - d_b \Delta B = r_b \left(1 - \frac{B}{K}\right) B - \mu P B, \\ \partial_t P - d_c \Delta P + (d_b - d_c) \frac{P}{B} \Delta B - 2 \frac{d_b}{B} \nabla B \cdot \nabla P = \\ \qquad (r_c - r_b + \frac{r_b}{K} B - \mu(r_c - 1)P) P, \end{cases}$$

Hypothèse (H3)

$$(H3) \quad d_b = d_c = d > 0.$$

$$\begin{cases} \partial_t B - d \Delta B = r_b \left(1 - \frac{B}{K}\right) B - \mu P B, \\ \partial_t P - d \Delta P - 2 \frac{d}{B} \nabla B \cdot \nabla P = (r_c - r_b + \frac{r_b}{K} B - \mu(r_c - 1)P) P, \end{cases}$$



Résultats

Zone I

Let assumptions (H1)-(H2)-(H3) hold. Assume $0 < r_b < r_c < 1$.

Then for each set of initial data (B_0, C_0) solutions to system (4) blow up in finite time. Hence system (2) has no componentwise positive solutions defined for all times.

Zone II

Let assumptions (H1)-(H2)-(H3) hold. Assume $0 < r_b < 1, r_c > 1$.

Then for each set of initial data (B_0, C_0) system (2) has a global componentwise positive solution defined for $(x, t) \in (0, +\infty) \times \Omega$.

Moreover,

$$(B, C)(x, t) \rightarrow (0, 0) \text{ as } t \rightarrow +\infty \text{ in } C(\bar{\Omega}).$$

Zone III

Let assumptions (H1)-(H2)-(H3) hold. Assume $r_b > 1$ and $r_c > 1$.

Then for each set of initial condition (B_0, C_0) system (2) has a global componentwise positive solution defined for $(x, t) \in (0, +\infty) \times \Omega$.



Preuves

Zone I

Soit z_- solution de

$$z' = (r_c - r_b - \mu(r_c - 1)z)z, \quad z(0) = \min_{x \in \Omega} P_0(x) > 0,$$

qui explose en temps fini.

Alors, $0 < z_-(t) \leq P(x, t)$ et par suite, P explose en temps fini.

Zone II

$B(x, t)$ étant bornée, on obtient $z_+(t) \geq P(x, t)$, avec z_+ solution de

$$z' = (r_c - r_b + r_b \max(\|B_0\|_{\infty, \Omega}, K) - \mu(r_c - 1)z)z, \quad z(0) = \|P_0\|_{\infty, \Omega}, \quad (9)$$

avec z_+ , définie sur \mathbb{R}^+ et bornée.

De la même façon, $0 < y_-(t) \leq B(x, t)$, avec y_- solution de

$$y' = r_b \left(1 - \frac{y}{K}\right) y - \mu z_+(t) y, \quad y(0) = \delta. \quad (10)$$

⇒ **Existence globale.**

De plus, on a $0 < z_-(t) \leq P(x, t)$, avec z_- solution de

$$z' = (r_c - r_b - \mu(r_c - 1)z)z, \quad z(0) = P_0 > 0,$$

$0 < r_b < 1, r_c > 1 \Rightarrow z_-$ solution globale et bornée avec

$$z_-(t) \rightarrow P^{**} = \frac{1}{\mu} \frac{r_c - r_b}{r_c - 1} \text{ as } t \rightarrow +\infty. \quad (11)$$

⇒ **P bornée.**

Conclusion en utilisant

$$y' = r_b \left(1 - \frac{y}{K}\right) y - \mu(P^{**} - \rho) y, \quad y(t_0) = y_0 > 0.$$



Dans le même esprit, on obtient un transfert partiel des résultats pour les zones (IV) et (V).

Zones IV et V

Let assumptions (H1)-(H2)-(H3) hold. Assume $r_c < 1$ and $r_c < r_b$. Then for each set of initial condition (B_0, C_0) with

$$P_0(x) = \frac{C_0(x)}{B_0(x)} \geq P^{**} = \frac{1}{\mu} \frac{r_b - r_c}{1 - r_c}, \quad x \in \Omega, \quad (12)$$

solutions of system (4) blow up in finite time. Hence system (2) has no componentwise positive solutions defined for all times.

$$\mathcal{P}_{(B,C)} = \left\{ (B, C), B > 0, C > 0, \frac{1}{K}B^2 - B + \frac{1}{P^{**}}C < 0 \right\};$$

Remarque : dans l'espace (B, P) , $\mathcal{P}_{(B,C)}$ est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(K, 0)$ et $(0, P^{**})$

Zone IV

Let assumptions (H1)-(H2)-(H3) hold. Assume $r_c < 1$ and $r_c + r_b \geq 2$. Then $\mathcal{P}_{(B,C)}$ is **(H2)**-forward invariant by (2), that is for each set of initial data with (B_0, C_0) lying in $\mathcal{P}_{(B,C)}$ – and satisfying condition **(H2)** – system (2) has a global solution with $(B(x, t), C(x, t)) \in \mathcal{P}_{(B,C)}$ for $(x, t) \in (0, +\infty) \times \Omega$. Moreover for $r_c + r_b > 2$ $(B^*, C^*) \in \mathcal{P}_{(B,C)}$ is linearly stable.

Méthode numérique : Splitting

Schéma

1. Résolution de systèmes linéaires pour la partie diffusion.
2. Résolution de la partie réaction.

Avantages

- Conservation de la positivité.
- Étape 2 simplifiée : calcul explicite.

oscillations spatio-temporelles 1D

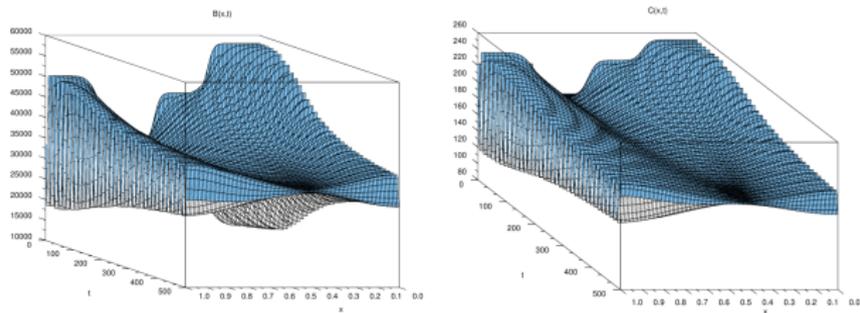


FIG.: Oscillations spatio-temporelles pour la solution du système (2) quand $r_b + r_c = 2$

Conclusion

Etude théorique

- Compléter l'étude dans le cas BC
- Transposer la méthodologie aux modèles d'ordre supérieur (BRC, JARC, ...)
- Suppression de l'hypothèse (H3) ?

Ouvertures

- Dépendance en temps des paramètres (saisonnalité, etc)
- Introduction de termes de contrôle