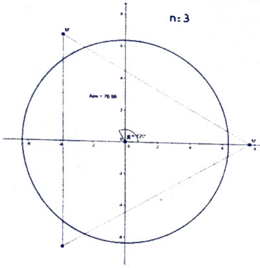
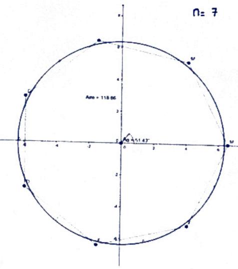
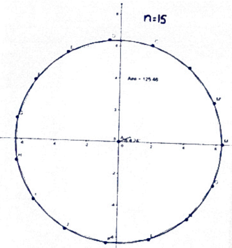
Problème Isopérimétrique

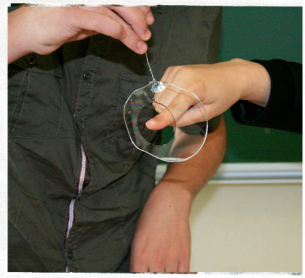
Adrien ; Corentin ; Marina ; Simon et Solène.



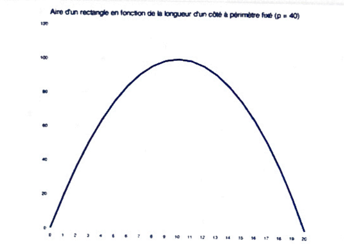




Film de savon



On plonge le film de fer avec une ficelle fermée à l'intérieur. Quand on perce le film de savon dans la ficelle, cette dernière prend la forme d'un cercle parfait car l'énergie du film étant proportionnelle à son aire, le moyen de minimiser l'énergie du film est de rétrécir son aire au maximum. Or pour un périmètre fixe, le cercle est le polygone ayant la plus grande aire.



Cette courbe montre l'aire d'un rectangle de périmètre 40cm en fonction de la longueur d'un des côtés on voit que parmi ces rectangles c'est le carré qui a ~~le~~ la plus grande aire.

Champs circulaires en Jordanie, pour optimiser l'arrosage.

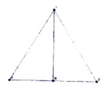
Cercle de périmètre 40 cm :
rayon = $40/2\pi$
Aire = $\pi\,(40/2\pi)^2$
= $400/\pi$

Aire ≈ 127,32 cm²

Comparaison des aires des principaux **polygones réguliers** pour un périmètre donné à savoir 40 cm :

Triangle équilatéral ADC :
côté = 40/3 cm

calcul de la hauteur :
Théorème de Pythagore dans le triangle ABC
$AC^2 = AB^2 + BC^2$
$(40/3)^2 = AB^2 + (20/3)^2$
$AB^2 = 1600/9 - 400/9$
$AB^2 = 1200/9$
$AB = 20\sqrt{3}/3$
AB = h



Aire = B * h /2
= $[40/3 * 20\sqrt{3}/3]/2$
= $800\sqrt{3}/18$
= $400\sqrt{3}/9$
≈ 76.98 cm²

Carré :
côté = 40/4 = 10 cm
Aire = 100 cm²

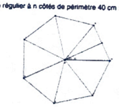
Fonction pour trouver l'Aire A(n) du polygone régulier à n côtés de périmètre 40 cm :

Aire de l'un des n triangles isocèles :

Aire = B * h /2
Aire = $[40/n * (20/n) / \tan(180°/n)]/2$

Aire totale du polygone :
$A(n) = n * [40/n * (20/n) / \tan(180°/n)]/2$

$\boxed{A(n) = 400/[n*\tan(180°/n)]}$



Observons la table de valeurs ci-contre :

Conjectures :

Plus un polygone régulier de périmètre fixé a de sommets, plus son aire est grande.
Le cercle a la plus grande aire pour un même périmètre (40cm).

nombre de côtés n	aire du polygone de périmètre 40 cm (en cm²)
3	76,98
4	100
5	110,11
6	115,47
7	118,66
8	120,71
9	122,11
10	123,11
11	123,84
12	124,4
13	124,84
14	125,18
15	125,46
16	125,68
17	125,87
18	126,03
19	126,16
20	126,28
21	126,37
22	126,46
23	126,53

aire du cercle de périmètre 40 cm (en cm²)
127,32

Raisonnement pat l'absurde

Conjecture: Parmi toutes ces figures de périmètre fixé, le cercle est celle qui a la plus grande aire.

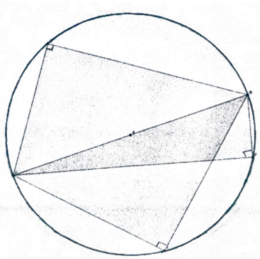
Piste: Supposer qu'il existe une figure d'aire maximale et de périmètre fixé et montrer que c'est un cercle.

On utilise une des **propriétés caractéristiques du cercle**.
Si un segment [AB] partage une figure en deux de sorte que pour tout point (sur le bord de la figure), **le triangle ABC est rectangle alors la figure est un cercle.**

On montre qu'une figure avec un périmètre fixé d'aire maximale a la propriété précédente.

On suppose que la figure ne possède pas cette propriété et on arrive à la conclusion qu'elle **ne peut être** d'aire maximale (*c'est un raisonnement par l'absurde*).

Pour que l'aire soit maximale, cette figure est un cercle.



On a représenté la moitié de notre figure, que l'on suppose d'aire maximale.

Les zones hachurées sont les mêmes sur les deux figures.
La longueur verte est la même sur les deux figures.
Si l'angle α n'est pas droit, la deuxième figure a une aire strictement plus grande que la première, qui n'est donc pas d'aire maximale. C'est impossible, donc α = 90°, pour n'importe quel choix de C sur le bord de la figure