

Les sabliers

I En ayant deux sabliers attachés, un de 5 minutes et un de 3 minutes, quels temps peut-on mesurer ?

Temps	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	11	14
Comment ?	0	X	Quand S_5 est fini, il reste 2 min dans S_3	$1 \times S_3$	X	$1 \times S_5$	$2 \times S_3$	2 minutes $1 \times S_5$	$1 \times S_5$ $1 \times S_3$	$3 \times S_3$	$1 \times S_5$ $2 \times S_3$	$1 \times S_5$ $3 \times S_3$

- On peut mesurer les temps : $3x + 5y$ et $2 + 3x + 5y$ avec x et $y \in \mathbb{N}$

On peut donc mesurer tous les temps sauf 1 et 4

II Avec deux sabliers détachés quels temps peut-on mesurer ?

3 et 5 minutes :

1. On peut mesurer 1 minute :

$$1 = 2 \times 3 - 5$$

2. On peut mesurer 4 minutes :

$$4 = 2 \times 5 - 2 \times 3.$$

7 et 4 minutes :

1. On peut mesurer les temps :

$$7x + 4y \geq 0 \quad \text{Avec } x, y \text{ dans l'ensemble } \mathbb{Z}$$

2. 1 minute : $1 = 7 \times (-1) + 4 \times 2.$

3. On peut mesurer N minutes car

$$N = N \times 1 = -N \times 7 + 2N \times 4.$$

6 et 4 minutes

1. On peut mesurer les temps :
 $6x + 4y \geq 0$ avec $x, y \in \mathbb{Z}$

2. On ne peut pas mesurer les temps impairs

$$\begin{aligned} N &= 6x + 4y = 2 \times 3x + 2 \times 2y \\ &= 2(3x + 2y) \end{aligned}$$

3. On peut mesurer 2 minutes $2 = 6 - 4$

On peut mesurer $N \times 2$ minutes

$$2N = 6N - 4N$$

Cet algorithme calcule comment mesurer N minutes avec deux sabliers attachés de 3 et 5 minutes, appelés S3 et S5.

Code de l'algorithme

```

1 VARIABLES
2 N EST_DU_TYPE NOMBRE
3 q EST_DU_TYPE NOMBRE
4 r EST_DU_TYPE NOMBRE
5 DEBUT ALGORITHME
6 LIRE N
7 SI (N=1 OU N=4 OU N=8) ALORS
8   DEBUT SI
9   AFFICHER "Impossible "
10  FIN SI
11 r PREND_LA_VALEUR N%3
12 q PREND_LA_VALEUR (N-r)/5
13 SI (r=0 ET q=0) ALORS
14   DEBUT SI
15   AFFICHER q
16   AFFICHER " fois S5 "
17   FIN SI
18 SI (r=3 ET q=0) ALORS
19   DEBUT SI
20   q PREND_LA_VALEUR q-1
21   AFFICHER q
22   AFFICHER " fois S5 puis, 2 fois S3 "
23   FIN SI
24 SI (r=2 ET q=0) ALORS
25   DEBUT SI
26   AFFICHER " on mesure 2 minutes, puis "
27   AFFICHER q
28   AFFICHER " fois S5 "
29   FIN SI
30 SI (r=3 ET q=0) ALORS
31   DEBUT SI
32   AFFICHER q
33   AFFICHER " fois S5, puis 1 fois S3 "
34   FIN SI
35 SI (r=4 ET q=0) ALORS
36   DEBUT SI
37   q PREND_LA_VALEUR q-1
38   AFFICHER q
39   AFFICHER " fois S5, puis 3 fois S3 "
40   FIN SI
41 FIN_ALGORITHME

```

Théorème de Bezout: Soient $a, b \in \mathbb{Z}$
et $d = \text{PGCD}(a, b)$

Alors il existe $x, y \in \mathbb{Z}$ tels que $ax + by = d$

- Avec deux sabliers on peut mesurer tous les multiples du PGCD de leurs durées
- Si ces durées sont premières entre elles on peut mesurer tous les temps.
- Réciproquement, $ax + by$ est multiple du pgcd de a et b .