Second concours ENS Paris-Saclay et Rennes 2024

L'épreuve est composée de deux problèmes indépendants, qui compteront chacun pour une part égale de la note totale. Merci de veiller à traiter chaque problème sur une copie séparée, en identifiant bien le problème à laquelle elle correspond.

Le sujet comprend 7 pages.

Problème 1 - Algèbre

Décomposition de Bruhat et espace de drapeaux

NOTATIONS ET RAPPELS

On travaille sur un corps commutatif $\mathbb{K}$ et pour tout le problème, on fixe un entier $n \geqslant 2$.

— On note $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le groupe des matrices inversibles de taille n et $T^+ \subset \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ le sous-groupe des matrices triangulaires supérieures inversibles.

— On note I_n la matrice identité et $E_{i,j}$ la matrice dont l'unique coefficient non nul est 1 en i-ème ligne et j-ème colonne. Pour $\lambda \in \mathbb{K}$, on note $T_{i,j}(\lambda)$ la matrice $I_n + \lambda E_{i,j}$ et $D_i(\lambda)$ la matrice $I_n + (\lambda - 1)E_{i,i}$. Pour M une matrice, on note $L_i(M)$ sa i-ème ligne et $C_j(M)$ sa j-ème colonne.

— On note Σ_n le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$, et pour $\sigma \in \Sigma_n$, on note P_σ la matrice de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ dont le coefficient en i-ème ligne et j-ème colonne vaut $\delta_{i,\sigma(j)}$. On rappelle que $\delta_{k,\ell}$ vaut 1 si $k = \ell$ et 0 sinon.

Rappels sur les actions de groupes Soit G un groupe de neutre e et X un ensemble.

— On dit que G agit sur X s'il existe une application

$$\begin{array}{rcl} G \times X & \to & X \\ (g, x) & \mapsto & g \cdot x \end{array}$$

vérifiant

$$\forall x \in X, e \cdot x = x \quad \text{ et } \forall\, (g, g') \in G^2, \forall x \in X, (gg') \cdot x = g \cdot (g' \cdot x)$$

— On appelle orbite d'un point x de X l'ensemble $\{g \cdot x \mid g \in G\}$.

— On appelle stabilisateur d'un élément x de X le sous-groupe

$$\mathrm{Stab}_x = \{g \in G \mid g \cdot x = x\}$$

— On dit que l'action est transitive si pour tout $(x, y) \in X^2$ il existe $g \in G$ tel que $g \cdot x = y$.

I - Décomposition de Bruhat

Soit $A = (a_{i,j})_{1 \leqslant i,j \leqslant n}$ une matrice carrée de taille n. Le but de cette partie est de montrer que si la matrice A est inversible, elle peut s'écrire comme produit d'une matrice de T^+, d'une matrice de permutation et d'une deuxième matrice de T^+.

I.1. Soient $i \neq j$ dans $\{1, \ldots, n\}$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Démontrer que les lignes de la matrice $T_{i,j}(\lambda)A$ vérifient les relations suivantes :

$$L_i\left(T_{i,j}(\lambda)A\right) = L_i(A) + \lambda L_j(A)$$
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}, L_k\left(T_{i,j}(\lambda)A\right) = L_k(A)$$

I.2. Soient i et j dans $\{1, \ldots, n\}$, soit $\lambda \in \mathbb{K}$. Démontrer les relations suivantes :

$$L_i\left(D_i(\lambda)A\right) = \lambda L_i(A)$$
$$C_j\left(AT_{i,j}(\lambda)\right) = C_j(A) + \lambda C_i(A)$$
$$C_i\left(AD_i(\lambda)\right) = \lambda C_i(A)$$

On admettra de plus que

$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}, L_k\left(D_i(\lambda)A\right) = L_k(A)$$
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{j\}, C_k\left(AT_{i,j}(\lambda)\right) = C_k(A)$$
$$\forall k \in \{1, \ldots, n\} \backslash \{i\}, C_k\left(AD_i(\lambda)\right) = C_k(A)$$

I.3. Démontrer que l'application de Σ_n vers $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ qui envoie σ sur P_σ est un morphisme de groupes.

I.4. Décrire les matrices $P_\tau A$ et AP_τ en utilisant les lignes ou les colonnes de la matrice A, où τ désigne une transposition dans Σ_n, puis $P_\sigma A$ et AP_σ en utilisant les lignes ou les colonnes de la matrice A, où σ est une permutation dans Σ_n.

On suppose pour toute la suite de la partie I que la matrice A est inversible.

I.5. Montrer que l'ensemble $\{i \in \{1, \ldots, n\} \mid a_{i,1} \neq 0\}$ est non vide. On appelle i_1 son maximum.

Montrer alors qu'il existe des matrices triangulaires supérieures inversibles T_g et T_d telles que $T_g A T_d = B$ où B est de la forme suivante si $i_1 < n$

$$
\begin{array}{c}
\\ \\ \\ \\ i_1 \rightarrow \\ \\ \\ \\
\end{array}
\begin{pmatrix}
0 & * & * & \dots & * \\
0 & * & * & \dots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & * & * & \dots & * \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & * & * & \dots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & * & * & \dots & *
\end{pmatrix}
$$

où le coefficient 1 est sur la i_1-ème ligne et où les étoiles représentent des scalaires ; et si $i_1 = n$, la matrice B est de la forme

$$
\begin{pmatrix}
0 & * & * & \dots & * \\
0 & * & * & \dots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & * & * & \dots & * \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0
\end{pmatrix}
$$

I.6. Pour la matrice B obtenue à la question précédente, montrer qu'il existe $i_2 \in \{1, \dots, n\}$, avec i_2 différent de i_1, et des matrices triangulaires supérieures inversibles T'_g et T'_d telles que $T'_g B T'_d = C$ où C est de la forme

$$
\begin{pmatrix}
0 & 0 & * & \dots & * \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & * & \dots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & * & \dots & * \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & * & \dots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & * & \dots & *
\end{pmatrix}
\text{ si } i_1 > i_2 \text{ ou }
\begin{pmatrix}
0 & 0 & * & \dots & * \\
1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & * & \dots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & * & \dots & * \\
0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & 0 & * & \dots & * \\
\vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\
0 & 0 & * & \dots & *
\end{pmatrix}
\text{ si } i_1 < i_2
$$

où les coefficients 1 sont sur les i_1-ème et i_2-ème lignes et où les étoiles représentent des scalaires.

I.7. Montrer qu'il existe des matrices triangulaires supérieures inversibles T_g et T_d telles que $T_g A T_d = P_\sigma$ où σ est une permutation.

I.8. En déduire que

$$
\mathrm{GL}_n(\mathbb{K}) = \bigcup_{\sigma \in \Sigma_n} T^+ P_\sigma T^+
$$

I.9. Soient T et T' dans T^+, soient σ et σ' dans Σ_n. On suppose que $T P_\sigma = P_{\sigma'} T'$. Montrer que $\sigma = \sigma'$.

Indication : On pourra observer que pour toute matrice $T = (t_{ij})_{1 \leqslant i,j \leqslant n} \in T^+$et tout $k \in \{1, \ldots, n\}$, on a

$$k = \max \{i \in \{1, \ldots, n\} \mid t_{ik} \neq 0\} = \min \{j \in \{1, \ldots, n\} \mid t_{kj} \neq 0\}$$

I.10. En déduire que pour une matrice $A \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ donnée, il existe un unique σ tel que $A = TP_\sigma T'$ où T et T' sont dans T^+. Ces T et T' sont-ils.uniques ?

II - Drapeaux

On appelle drapeau (complet) de $\mathbb{K}^n$ une suite finie de sous-espaces vectoriels

$$\{0\} \subset E_1 \subset E_2 \subset \ldots \subset E_{n-1} \subset E_n = \mathbb{K}^n$$

où toutes les inclusions sont strictes.

Soit $\mathcal{D}$ l'ensemble des drapeaux de $\mathbb{K}^n$.

II.1. Soit $(E_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ un drapeau. Prouver que pour tout i dans $\{1, \ldots, n\}, \dim E_i = i$.

II.2. Montrer que $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ agit transitivement sur $\mathcal{D}$ par la formule

$$M \cdot (E_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}} = (\{Mv \mid v \in E_i\})_{i \in \{1,\ldots,n\}}$$

où $M \in \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ et $(E_i)_{i \in \{1,\ldots,n\}}$ est un drapeau.

En déduire le nombre d'orbites de cette action.

On s'intéresse maintenant à compter les orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

On appelle D_0 le drapeau défini par

$$\forall i \in \{1, \ldots, n\}, E_i = \mathrm{Vect}\,(e_1, \ldots, e_i)$$

où $(e_1, \cdots, e_n)$ désigne la base canonique de $\mathbb{K}^n$.

II.3. Montrer que le stabilisteur de D_0 (pour l'action de la question II.2) est T^+.

II.4. Montrer que la relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ par $A\mathcal{R}B \iff A^{-1}B \in T^+$est une relation d'équivalence, puis que le quotient, noté $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T^+$, est en bijection avec $\mathcal{D}$ via l'application ϕ envoyant une classe $\bar{M}$ sur $M \cdot D_0$ (on commencera par montrer que ϕ est bien définie).

On considère maintenant l'action diagonale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T^+ \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T^+$définie par $M \cdot (\bar{A}, \bar{B}) = (\overline{MA}, \overline{MB})$. On ne démontrera pas que c'est bien une action.

II.5. Pour A et B de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$, montrer grâce à la partie I qu'il existe $\sigma \in \Sigma_n$ et $T \in T^+$tels que $(\bar{A}, \bar{B}) = AT \cdot \left(\bar{I}_n, \bar{P}_\sigma\right)$, et que σ est unique.

II.6. En déduire le nombre d'orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T^+ \times \mathrm{GL}_n(\mathbb{K})/T^+$.

Remarque : Cette action correspond bijectivement via ϕ à l'action diagonale de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$. La dernière question dénombre donc le nombre d'orbites de l'action de $\mathrm{GL}_n(\mathbb{K})$ sur $\mathcal{D} \times \mathcal{D}$.

Problème 2 - Analyse

Opérateur de Volterra et opérateurs compacts

NOTATIONS ET RAPPELS

On rappelle qu'un espace de pré-hilbertien complexe est un espace vectoriel sur $\mathbb{C}$, muni d'un produit scalaire hermitien $(v, w) \in H^2 \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$, c'est-à-dire tel que :

— pour tout w dans H, l'application $v \in H \mapsto \langle v, w\rangle \in \mathbb{C}$ est linéaire.

— pour tous v, w de $H, \langle v, w\rangle = \overline{\langle w, v\rangle}$. En particulier, $\langle v, v\rangle$ est un réel.

— pour tout v dans $H, \langle v, v\rangle \geqslant 0$ avec égalité si et seulement si $v = 0$. L'application $v \mapsto \sqrt{\langle v, v\rangle}$ est alors une norme (la norme associée) sur H.

Un espace de Hilbert est un espace pré-hilbertien qui est complet pour la norme associée.

On considère dans ce problème un espace de Hilbert complexe $(H, \langle\cdot, \cdot\rangle)$, de dimension infinie, et on note $\|\cdot\|$ la norme associée. On note respectivement $B_1(H)$ et $S_1(H)$ la boule unité et la sphère unité, toutes deux centrées en 0 .

On note $\mathcal{L}(H)$ l'ensemble des endomorphismes linéaires continus de H, muni de la norme d'opérateur

$$|||T||| = \sup_{v \in H\backslash\{0\}} \frac{\|Tv\|}{\|v\|} = \sup_{v \in S_1(H)} \|Tv\|$$

Un nombre complexe λ est une valeur propre de T si il existe un v non nul de H, appelé alors un vecteur propre, tel que $Tv = \lambda v$.

On rappelle les résultats suivants, qui pourront être utilisés sans démonstration :

— Théorème de représentation de Riesz : pour toute forme linéaire continue $\phi : H \to \mathbb{C}$, il existe un unique vecteur w tel que $\phi = \langle\cdot, w\rangle$.

— On note $CPM([0, 1], \mathbb{C})$ l'ensemble des fonctions $[0, 1] \to \mathbb{C}$ constantes par morceaux. $CPM([0, 1], \mathbb{C})$ est dense dans $L^2([0, 1], \mathbb{C})$.

Cas particuliers :

On note $L^2([0, 1], \mathbb{C})$ l'espace de Hilbert des classes de fonctions boréliennes f (à equivalence p.p. près) telles que $\int_0^1 |f(t)|^2 dt < +\infty$ pour lequel $\langle f, g\rangle = \int f(t)\bar{g}(t)dt$.

On note enfin $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert des suites $u = (u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ à valeurs dans $\mathbb{C}$ telles que $\sum_{n=0}^{\infty} |u_n|^2 < +\infty$ pour lequel $\langle u, v\rangle = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \bar{v}_n$.

I - Préliminaire

Soit T dans $\mathcal{L}(H)$.

I.1. Montrer qu'on a $|||T||| = \sup_{v,w \in S_1(H)} |\langle Tv, w\rangle|$

I.2. a) Soit w dans H. Montrer qu'il existe un unique vecteur, qu'on notera T^*w, tel que pour tout v dans $H, \langle Tv, w\rangle = \langle v, T^*w\rangle$. On peut ainsi considérer l'application $T^* : w \in H \mapsto T^*w \in H$.

b) Montrer que T^* est dans $\mathcal{L}(H)$, et que $|||T^*||| \leqslant |||T|||$.

c) Montrer que $(T^*)^* = T$. En déduire que $|||T^*||| = |||T|||$. On appelle T^* l'adjoint de T.

On dit que

— T est auto-adjoint si $T^* = T$.

— T est de rang fini si $T(H)$ est de dimension finie.

— T est compact si, pour toute suite bornée $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on peut extraire de $(Tv_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente.

On note $\mathcal{K}(H)$ l'ensemble des $T \in \mathcal{L}(H)$ compacts.

I.3. On suppose dans cette question que T est auto-adjoint.

a) Soient v, w dans H. Calculer la partie réelle de $\langle Tv, w\rangle$ en fonction de $\langle T(v+w), v+w\rangle$ et $\langle T(v-w), v-w\rangle$.

b). En déduire que $|||T||| = \sup_{v\in S_1(H)} |\langle Tv, v\rangle|$.

c) Montrer que les valeurs propres de T sont réelles, et que des vecteurs propres associés à des valeurs propres distinctes sont orthogonaux.

I.4. Montrer que si T est de rang fini, alors il est compact.

I.5. Montrer que $\mathcal{K}(H)$ est un idéal bilatère de $\mathcal{L}(H)$, c'est-à-dire

$$\forall T \in \mathcal{K}(H), \forall B \in \mathcal{L}(H), \quad TB \in \mathcal{K}(H) \text{ et } BT \in \mathcal{K}(H)$$

II - CAS DISCRET : ÉTUDE D'UNE FAMILLE D'ENDOMORPHISMES SUR $\ell^2(\mathbb{N})$

II.1. Soit $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une famille orthonormée de H. Montrer qu'aucune sous-suite de $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}$ n'est de Cauchy. En déduire que la boule unité de H n'est pas compacte.

Jusqu'à la fin de la partie II, $H = \ell^2(\mathbb{N})$. Soit $\alpha = (\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée dans $\mathbb{C}$.

II.2. Montrer que pour tout $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dans H, la suite $(\alpha_n u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est également dans H.

On peut ainsi définir l'application $T : (u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H \mapsto (\alpha_n u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in H$.

II.3. Montrer que T appartient à $\mathcal{L}(H)$, c'est-à-dire que c'est un endomorphisme linéaire continu de H.

II.4. Donner une condition nécessaire et suffisante sur la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pour que T soit de rang fini.

II.5. Montrer que T est compact si et seulement si la suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers 0 .

III - CAS CONTINU : ÉTUDE D'UN ENDOMORPHISME DE $L^2([0,1],\mathbb{C})$

Dans cette partie, $H = L^2([0,1],\mathbb{C})$. Pour f dans H, on définit $Tf : [0,1] \to \mathbb{C}$ par

$$(Tf)(x) = Tf(x) = \int_0^x f(t)dt, \quad x \in [0,1]$$

III.1. a) Montrer que pour $f \in H$ et pour tout $x \in [0,1]$, on a $|Tf(x)| \leqslant \sqrt{x}\|f\|$. En déduire que la fonction Tf appartient à H.

b) Montrer que T est un endomorphisme continu de H, avec norme d'opérateur $\|T\| \leqslant \frac{1}{\sqrt{2}}$.

III.2. Montrer que pour tout f dans H, Tf est une fonction continue sur $[0,1]$.

III.3. Montrer que T n'a pas de valeur propre.

III.4. On va montrer que $T \in \mathcal{K}(H)$. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$, une suite bornée de H.

a) Montrer que pour tout x dans $[0,1]$, on peut extraire de $(Tf_n(x))_{n\in\mathbb{N}}$ une sous-suite convergente dans $\mathbb{C}$.

b) En déduire qu'il existe une sous-suite $(Tf_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ qui converge simplement sur $\mathbb{Q} \cap [0,1]$.

c) Montrer qu'il existe une constante $M > 0$ telle que pour tout k entier positif, et pour tous x, y dans $[0,1]$, $|Tf_{n_k}(y) - Tf_{n_k}(x)| \leqslant M\sqrt{|x-y|}$.

d) Montrer que la suite $(Tf_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ est de Cauchy dans l'espace de Banach $\mathcal{C}^0([0,1],\mathbb{C})$.

e) Conclure.

III.5. Montrer que l'adjoint T^* de T est donné par $T^*f : x \mapsto \int_x^1 f(t)dt$.

III.6. On note $A = T^*T$. Montrer que A est un endomorphisme compact et auto-adjoint.