Ecole Normale Supérieure Paris-Saclay
Ecole Normale Supérieure de Rennes

SECOND CONCOURS

ADMISSION EN CYCLE MASTER MATHEMATIQUES

Session 2021

Épreuve de MATHEMATIQUES

Durée : 5 heures

«Aucun document n'est autorisé»

« L'usage de toute calculatrice est interdit»

Si, au cours de l'épreuve, un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

.

*L'épreuve est composée de deux parties indépendantes, qui compteront chacune pour une part égale de la note totale. Merci de veiller à **traiter chaque partie sur une copie séparée**, en identifiant bien la partie à laquelle elle correspond.*

Le sujet comprend 7 pages.

⋆ ⋆ ⋆

Partie 1 – ALGEBRE

Le mot le plus long

Notations et rappels

On note $\mathbb{N}$ l'ensemble des entiers naturels. Pour $n \in \mathbb{N}$ non nul, on note $\mathfrak{S}_n = \mathfrak{S}(\{1, \dots, n\})$ le groupe symétrique d'indice n. C'est l'ensemble des permutations de l'ensemble fini $\{1, \dots, n\}$ à n éléments, muni de la composition. On note $\mathbf{1} \in \mathfrak{S}_n$ l'élément neutre, donné par l'identité de $\{1, \dots, n\}$ et pour $u, v \in \mathfrak{S}_n$, on notera $uv := u \circ v$ et u^{-1} désignera l'inverse de u.

Pour $i, j \in \{1, \dots, n\}$ avec $i \neq j$, on note $t_{i,j} \in \mathfrak{S}_n$ la permutation définie par $t_{i,j}(i) = j$, $t_{i,j}(j) = i$ et $t_{i,j}(k) = k$ pour tout $k \in \{1, \dots, n\} \backslash \{i, j\}$. On dit que $t_{i,j}$ est une *transposition.*

On rappelle que l'ensemble des transpositions engendre $\mathfrak{S}_n$. Pour chaque $i \in \{1, \dots, n-1\}$, on désigne par t_i la transposition $t_{i,i+1}$.

Pour $w \in \mathfrak{S}_n$, on appelle *nombre d'inversions* de w le nombre $I(w)$ de couples $(i, j) \in \{1, \dots, n\}^2$ avec $i < j$ tels que $w(i) > w(j)$. La *signature* est l'application $\epsilon : \mathfrak{S}_n \to \{+1, -1\}$ donnée par $\epsilon(w) := (-1)^{I(w)}$. L'application ϵ est un morphisme, qui vaut -1 sur toutes les transpositions.

On fixe dorénavant $n \in \mathbb{N}$ avec $n \geqslant 2$.

I - Unicité de la signature

I.1. Montrer que $t^2 = \mathbf{1}$ pour toute transposition $t \in \mathfrak{S}_n$. Y a-t-il d'autres éléments d'ordre 2 dans $\mathfrak{S}_n$?

I.2. Soit $t \in \mathfrak{S}_n$ une transposition et soit $w \in \mathfrak{S}_n$. Montrer que wtw^{-1} est une transposition.

I.3. Soient $t, t' \in \mathfrak{S}_n$ deux transpositions. Montrer qu'il existe $w \in \mathfrak{S}_n$ tel que $t' = wtw^{-1}$.

Soit G un groupe abélien et soit f un morphisme non trivial de $\mathfrak{S}_n$ vers G, c'est à dire tel que l'image de f n'est pas réduite à l'élément neutre de G.

I.4. Montrer que si $t, t' \in \mathfrak{S}_n$ sont deux transpositions alors $f(t) = f(t')$.

I.5. En notant $a \in G$ l'image d'une transposition, montrer que $f(\mathfrak{S}_n)$ est inclus dans le sous-groupe $\langle a \rangle$ engendré par a.

I.6. Montrer que a est d'ordre exactement 2 et en déduire qu'il existe un unique isomorphisme θ entre $f(\mathfrak{S}_n)$ et $\{+1, -1\}$.

I.7. Montrer que $\theta \circ f = \epsilon$.

II - Longueur

II.1. a) Soient $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ avec $|i-j| > 1$, montrer que $t_{i,j} = t_{j-1} t_{i,j-1} t_{j-1}$.

b) En déduire que les transpositions $\{t_i\}_{i \in \{1,\dots,n-1\}}$ engendrent $\mathfrak{S}_n$.

c) Pour $i, j \in \{1, \dots, n-1\}$ avec $|i-j| > 1$, montrer que $t_i t_j = t_j t_i$.

d) On suppose ici $n \geqslant 3$. Pour $i \in \{1, \dots, n-2\}$, expliciter la permutation $t_i t_{i+1} t_i \in \mathfrak{S}_n$ et montrer que $t_i t_{i+1} t_i = t_{i+1} t_i t_{i+1}$.

II.2. a) Soit $w \in \mathfrak{S}_n$. Justifier que l'entier suivant, appelé *longueur* de w,

$$\ell(w) := \min\{a \in \mathbb{N} : \text{il existe } i_1, \dots, i_a \in \{1, \dots, n-1\} \text{ tels que } w = t_{i_1} \cdots t_{i_a}\},$$

est bien défini. (Par convention, si $a = 0$ alors $t_{i_1} \cdots t_{i_a} = \mathbf{1}$, ainsi $\mathbf{1}$ est l'unique élément de longueur 0.)

b) Identifier les éléments de $\mathfrak{S}_n$ de longueur 1 ?

c) Identifier les éléments de $\mathfrak{S}_n$ de longueur 2 ?

d) On suppose ici que $n \geqslant 3$ et $i \in \{1, \dots, n-2\}$. Montrer que $\ell(t_{i,i+2}) = 3$.

II.3. Soient $w \in \mathfrak{S}_n$ et $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

a) Soit $w' \in \mathfrak{S}_n$. Montrer les propriétés suivantes :

$$\begin{aligned} \ell(w) &= \ell(w^{-1}), \\ \ell(ww') &\leqslant \ell(w) + \ell(w'), \qquad (\clubsuit) \\ \ell(ww') &\geqslant |\ell(w) - \ell(w')|, \end{aligned}$$

et donner un exemple de cas d'égalité et d'inégalité stricte pour ($\clubsuit$).

b) En déduire que $\ell(w) - 1 \leqslant \ell(wt_i) \leqslant \ell(w) + 1$

c) Montrer que $\epsilon(w) = (-1)^{\ell(w)}$ et en déduire que $|\ell(wt_i) - \ell(w)| = 1$.

d) Montrer que de même $|\ell(t_i w) - \ell(w)| = 1$. A-t-on nécessairement $\ell(t_i w) = \ell(wt_i)$?

II.4. Soit $w \in \mathfrak{S}_n$ avec $w \neq \mathbf{1}$ et soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$.

a) Montrer que si w est de la forme $w = t_{i_1} \cdots t_{i_{\ell(w)-1}} t_i$ pour $i_1, \dots, i_{\ell(w)-1} \in \{1, \dots, n-1\}$ alors $\ell(wt_i) = \ell(w) - 1$.

b) Montrer la réciproque.

III - Lien avec le nombre d'inversions

Soit $w \in \mathfrak{S}_n$.

III.1. Soit $i \in \{1, \dots, n-1\}$. Montrer que :

$$I(wt_i) = \begin{cases} I(w) - 1, & \text{si } w(i) > w(i+1), \\ I(w) + 1, & \text{si } w(i) < w(i+1). \end{cases}$$

III.2. En déduire que $I(w) \leqslant \ell(w)$.

III.3. Montrer que si $w \neq \mathbf{1}$ alors il existe $i \in \{1, \ldots, n-1\}$ tel que $I(wt_i) = I(w) - 1$.

III.4. En déduire que $I(w) = \ell(w)$. *Indication : on pourra raisonner par récurrence sur $I(w)$.*

III.5. En déduire qu'il existe un unique élément $w_0 \in \mathfrak{S}_n$ tel que

$$\ell(w_0) = \max\{\ell(w) : w \in \mathfrak{S}_n\}.$$

III.6. Déterminer $\ell(w_0)$, expliciter w_0 et trouver $i_1, \ldots, i_{\ell(w_0)} \in \{1, \ldots, n-1\}$ tels que $w_0 = t_{i_1} \cdots t_{i_{\ell(w_0)}}$.

⋆ ⋆ ⋆

Partie 2 – ANALYSE

Un théorème d'interpolation

Notations et rappels

– *Pour tout* $p \in]1, \infty[$*, on introduit les notations suivantes :*

  – *Pour toute fonction borélienne* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ *on note* $\|f\|_p = \left(\int_{\mathbb{R}} |f|^p(x)\,\mathrm{d}x\right)^{\frac{1}{p}}$ *et lorsque* $\|f\|_p < \infty$*, on dira que* $f \in L^p(\mathbb{R})$ *(en assimilant selon la convention habituelle* f *à sa classe d'équivalence pour la relation d'égalité presque partout). On rappelle qu'alors* $\| \ \|_p$ *est une norme sur* $L^p(\mathbb{R})$ *qui fait de* $L^p(\mathbb{R})$ *un espace vectoriel normé.*

  – *On note* p' *l'unique réel qui vérifie* $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$.

  – *Pour* $(f, g) \in L^p(\mathbb{R}) \times L^{p'}(\mathbb{R})$*, on rappelle l'inégalité de Hölder* $\int_{\mathbb{R}} |f(x)g(x)|dx \leqslant \|f\|_p \|g\|_{p'}$ *et on note* $\langle f, g\rangle = \displaystyle\int_{\mathbb{R}} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x$.

– *Si* E *et* F *sont deux espaces vectoriels normés munis des normes respectives* $\|\cdot\|_E$ *et* $\|\cdot\|_F$*, et* T *est une application linéaire de* E *dans* F*, on note*

$$\|T\|_{E,F} \ = \ \sup\,\{\|Tf\|_F,\ \|f\|_E = 1\}.$$

On rappelle que T *est continue si et seulement si* $\|T\|_{E,F}$ *est finie.*

– *Une fonction borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *est dite fonction étagée si elle prend un nombre fini de valeurs. Dans ce cas, il existe* $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ *dans* $\mathbb{C}$ *et* $A_1, \ldots, A_n$ *des ensembles boréliens de* $\mathbb{R}$ *tels que* $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$*, où* $\mathbf{1}_A$ *est la fonction indicatrice d'un ensemble* A.

– *On rappelle que pour toute fonction* f *borélienne de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$*, il existe une suite* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *de fonctions étagées et à support compact de* $\mathbb{R}$ *dans* $\mathbb{C}$ *telles que* $|f_n| \leqslant |f|$ *pour tout* $n \in \mathbb{N}$*, et* $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *converge simplement vers* f.

– *On rappelle le principe du maximum : si* U *est un ouvert connexe de* $\mathbb{C}$ *et* $f : U \to \mathbb{C}$ *est une fonction holomorphe sur* U *telle que* $|f|$ *admet un maximum local en un point de* U*, alors* f *est constante sur* U.

I - Un lemme préliminaire

I.1. Soient r_0 et r_1 des réels dans $]1,\infty[$, et $\theta \in [0,1]$. On introduit r défini par $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1-\theta}{r_0} + \dfrac{\theta}{r_1}$. Montrer que si $f \in L^{r_0}(\mathbb{R}) \cap L^{r_1}(\mathbb{R})$, alors $f \in L^r(\mathbb{R})$ et $\|f\|_r \leqslant \|f\|_{r_0}^{1-\theta}\|f\|_{r_1}^{\theta}$.

II - Théorème des trois droites de Hadamard

Dans toute cette partie, on note $B = \{z \in \mathbb{C},\ 0 < \mathfrak{Re}\ z < 1\}$, $\overline{B} = \{z \in \mathbb{C},\ 0 \leqslant \mathfrak{Re}\ z \leqslant 1\}$ *et* $\mathcal{F}_B$ *l'ensemble des fonctions* F *holomorphes sur* B*, continues et bornées sur* $\overline{B}$*, telles que les réels* $M_0(F) = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}} |F(iy)|$ *et* $M_1(F) = \sup\limits_{y\in\mathbb{R}} |F(1+iy)|$ *soient non nuls.*

On cherche à montrer le résultat suivant :

Théorème. *Soit* $F \in \mathcal{F}_B$*. Pour tout* $\theta \in [0,1]$*, on a*

$$\sup_{y\in\mathbb{R}} |F(\theta + iy)| \ \leqslant\ M_0(F)^{1-\theta} M_1(F)^{\theta}.$$

II.1. Des cas particuliers :

a. Montrer que si le résultat est vrai pour deux fonctions F_1 et F_2 de $\mathcal{F}_B$, alors il est vrai pour le produit F_1F_2.

b. Montrer que le théorème est vrai pour $F(z) = \alpha \exp(\beta z)$, où α, $\beta \in \mathbb{R}$.

II.2. Soit $F \in \mathcal{F}_B$. On fait dans un premier temps l'hypothèse que $M_0(F) = M_1(F) = 1$.

a. Pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, on introduit la fonction F_n définie sur $\overline{B}$ par

$$F_n(z) \ = \ F(z) e^{\frac{z^2-1}{n}}, \quad \text{pour tout } z \in \overline{B}.$$

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, la fonction F_n est holomorphe sur B, et que $\lim\limits_{|z|\to\infty} F_n(z) = 0$.

b. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^\star$, $|F_n(z)| \leqslant 1$ pour tout $z \in \overline{B}$, et en déduire que le théorème est vrai sous cette hypothèse.

II.3. Montrer le théorème dans le cas général. *On pourra utiliser la question II.1.*

III - Un théorème d'interpolation

Soient p_0, p_1, q_0, q_1 *des réels dans* $]1,\infty[$ *tels que* $p_0 \neq p_1$*, et* $q_0 \neq q_1$*. On considère deux opérateurs linéaires continus*

$$T_0 : L^{p_0}(\mathbb{R}) \to L^{q_0}(\mathbb{R}),$$

$$T_1 : L^{p_1}(\mathbb{R}) \to L^{q_1}(\mathbb{R}),$$

tels que T_0 *et* T_1 *coïncident sur l'espace* $E := L^{p_0}(\mathbb{R}) \cap L^{p_1}(\mathbb{R})$*. On note* $M_0 = \|T_0\|_{L^{p_0}(\mathbb{R}),L^{q_0}(\mathbb{R})}$ *et* $M_1 = \|T_1\|_{L^{p_1}(\mathbb{R}),L^{q_1}(\mathbb{R})}$*, et on suppose que* M_0 *et* M_1 *sont non nuls.*

Soient par ailleurs $p, q \in]1, \infty[$ tels que le point $(\frac{1}{p}, \frac{1}{q})$ appartienne au segment $\left[(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}), (\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})\right]$, c'est-à-dire qu'il existe $\theta \in [0, 1]$ tel que

$$\frac{1}{p} \;=\; \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}, \quad \textit{et} \quad \frac{1}{q} \;=\; \frac{1-\theta}{q_0} + \frac{\theta}{q_1}.$$

III.1. On appelle T la restriction de l'opérateur T_0 à E, qui coïncide avec la restriction de l'opérateur T_1 à E, c'est-à-dire que pour toute fonction $f \in E$,

$$Tf \;=\; T_0 f \;=\; T_1 f.$$

Montrer que T définit un opérateur linéaire de E dans $L^q(\mathbb{R})$.

III.2. Montrer que pour toute fonction $h \in L^q(\mathbb{R})$, on a

$$\|h\|_q \;=\; \sup\left\{|\langle h, g\rangle|,\ g \in L^{q'}(\mathbb{R}) \text{ et } \|g\|_{q'} = 1\right\}.$$

III.3. On munit E de la norme $\|\cdot\|_p$, et on désigne par $\mathcal{E}_c(\mathbb{R})$ l'espace des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ étagées à support compact.

a. Soient $r \in]1, \infty[$. Montrer que si $f \in L^r(\mathbb{R})$ et $\|f\|_r = 1$, alors il existe une suite $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de $\mathcal{E}_c(\mathbb{R})$ telle que

- pour tout $n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_r = 1$ et $|f_n| \leqslant 2|f|$ presque partout sur $\mathbb{R}$,
- $\lim\limits_{n\to\infty} \|f - f_n\|_r = 0$.

b. En déduire que

$$\|T\|_{E, L^q(\mathbb{R})} \;=\; \sup\left\{|\langle Tf, g\rangle|,\ f, g \in \mathcal{E}_c(\mathbb{R}),\ \|f\|_p = \|g\|_{q'} = 1\right\}.$$

III.4. Pour tout $z \in \overline{B}$, on pose

$$p(z) \;=\; \left(\frac{1-z}{p_0} + \frac{z}{p_1}\right)^{-1}, \quad \text{et} \quad q'(z) \;=\; \left(\frac{1-z}{q'_0} + \frac{z}{q'_1}\right)^{-1}.$$

On considère deux fonctions $f = \sum_{i=1}^n \alpha_i \mathbf{1}_{A_i}$ et $g = \sum_{j=1}^m \beta_j \mathbf{1}_{B_j}$ dans $\mathcal{E}_c(\mathbb{R})$ telles que $\|f\|_p = \|g\|_{q'} = 1$, et on note φ_z et ψ_z les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$ définies par

$$\varphi_z(x) \;=\; \begin{cases} |f(x)|^{\frac{p}{p(z)}-1} f(x) & \text{si } f(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases} \quad \text{et} \quad \psi_z(x) \;=\; \begin{cases} |g(x)|^{\frac{q'}{q'(z)}-1} g(x) & \text{si } g(x) \neq 0, \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On introduit la fonction $F : \overline{B} \to \mathbb{C}$ définie par $F(z) = \langle T\varphi_z, \psi_z\rangle$ pour tout $z \in \overline{B}$.

a. Montrer que φ_z et ψ_z sont des fonctions étagées et expliciter les en fonction des α_i, A_i, β_j et B_j.

b. Montrer que la fonction F est bien définie, continue et bornée sur $\overline{B}$, et holomorphe sur B.

Indication : on pourra commencer par montrer que la fonction F s'écrit comme une combinaison linéaire de fonctions de la forme $z \mapsto \gamma^z$, où $\gamma \in \mathbb{R}_+^\star$.

c. Calculer $F(\theta)$.

III.5. En appliquant II à la fonction F montrer que T est continue de E dans $L^q(\mathbb{R})$, et que

$$\|T\|_{E,L^q(\mathbb{R})} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

III.6. Montrer qu'il existe une unique application linéaire continue $\widetilde{T}$ de $L^p(\mathbb{R})$ dans $L^q(\mathbb{R})$ telle que pour toute fonction $f \in E$, $\widetilde{T} f = T_0 f = T_1 f$, et

$$\|\widetilde{T}\|_{L^p(\mathbb{R}),L^q(\mathbb{R})} \leqslant M_0^{1-\theta} M_1^{\theta}.$$

⋆ ⋆ ⋆