DOCTORAT BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

école normale supérieure rennes

THÈSE DE DOCTORAT DE

L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE RENNES

ÉCOLE DOCTORALE Nº 601
Mathématiques et Sciences et Technologies de l'Information et de la Communication
Spécialité : *Mathématiques et leurs interactions*

Par
Mégane BOURNISSOU

Contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles non linéaires

Thèse présentée et soutenue à L'ÉCOLE NORMALE SUPÉRIEURE DE RENNES, le 30 juin 2022
Unité de recherche : Univ Rennes, CNRS, IRMAR - UMR 6625, F-35000 Rennes, France

Rapporteurs avant soutenance :

Mario SIGALOTTI Directeur de Recherche INRIA, Sorbonne Université
Marius TUCSNAK Professeur des Universités, Université de Bordeaux

Composition du Jury :

Rapporteurs :	Mario SIGALOTTI	Directeur de Recherche INRIA, Sorbonne Université
	Marius TUCSNAK	Professeur des Universités, Université de Bordeaux
Examinateurs :	Jean-Michel CORON	Professeur des Universités, Sorbonne Université
	Sylvain ERVEDOZA	Directeur de Recherche CNRS, Université de Bordeaux
	Hoai-Minh NGUYEN	Professeur des Universités, Sorbonne Université
Dir. de thèse :	Karine BEAUCHARD	Professeur des Universités, École Normale Supérieure de Rennes
Co-enc. de thèse :	Fréderic MARBACH	Chargé de Recherche CNRS, École Normale Supérieure de Rennes

DOCTORAT BRETAGNE LOIRE / MATHSTIC

école normale supérieure rennes

Titre : Contrôlabilité d'équations aux dérivées partielles non linéaires

Mot clés : Théorie du contrôle, équations aux dérivées partielles, contrôlabilité exacte, contrôle bilinéaire, équation de Schrödinger, développement de la solution

Résumé : Cette thèse est consacrée au contrôle de l'équation de Schrödinger sur un intervalle borné, avec des conditions de bord de Dirichlet et un contrôle agissant de manière bilinéaire. On étudie sa contrôlabilité autour de l'état fondamental lorsque le système linéarisé n'est pas contrôlable. Plus précisément, on se demande de quelle façon les termes quadratiques et cubiques du développement de la solution peuvent aider ou non à récupérer la contrôlabilité perdue au linéaire.

D'abord, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on formule des hypothèses sous lesquelles le terme quadratique induit une dérive pour la dynamique non linéaire, quantifiée par la norme H^{-n} du contrôle, empêchant la contrôlabilité locale en temps petit (STLC) pour des contrôles petits en norme H^{2n-3}. Ensuite, on montre au contraire que, pour des contrôles petits dans des espaces moins réguliers, le terme cubique permet de récupérer la contrôlabilité perdue au linéaire, malgré la dérive. La preuve s'inspire de la méthode de Sussmann pour prouver la condition suffisante $\mathcal{S}(\theta)$ de STLC pour les équations différentielles. Cependant, on utilise une stratégie globale différente s'appuyant sur un nouveau concept de vecteur tangent, plus adapté au cadre de la dimension infinie. Cela nécessite d'établir un résultat de STLC en projection avec des estimations simultanées du contrôle dans des normes faibles, ce qui fait l'objet d'une troisième partie.

Title: Controllability of nonlinear partial differential equations

Keywords: Control theory, partial differential equations, exact controllability, bilinear control, Schrödinger equation, power series expansion

Abstract: This thesis is devoted to the control of the Schrödinger equation, on a bounded interval, with Dirichlet boundary conditions and bilinear control. We study its controllability around the ground state when the linearized system is not controllable. More precisely, we study to what extent the quadratic and cubic terms of the expansion of the solution can help to recover the directions lost at the linear level.

First, for any $n \in \mathbb{N}^*$, we formulate assumptions under which the quadratic term induces a drift in the nonlinear dynamics, quantified by the H^{-n}-norm of the control, preventing small-time local controllability (STLC) for controls small in the H^{2n-3}-norm. In a second part, we prove on the contrary that for controls small in less regular spaces, the cubic term enables us to recover the controllability lost at the linear level, despite the drift. The proof is inspired by Sussmann's method to show the sufficiency of the $\mathcal{S}(\theta)$ condition for STLC in finite dimension. However, it uses a different global strategy relying on a new concept of tangent vector, better adapted to an infinite-dimensional framework. This requires to establish a STLC in projection result, with simultaneous estimates of weak norms of the control, which is done in a third part.