

La recherche en mathématiques à l'antenne de Bretagne

<http://www.bretagne.ens-cachan.fr/math/>

La recherche en mathématiques à l'antenne se développe au sein de l'IRMAR, Institut de Recherche Mathématique de Rennes, dont l'ENS Cachan est une des tutelles. L'IRMAR fédère les mathématiciens rennais autour de trois grands domaines de recherche : analyse, aléatoire, et géométrie.

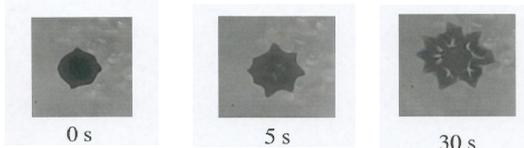
Les recherches à l'ENS sont plus spécifiquement orientées vers l'analyse appliquée et la statistique, de la modélisation aux simulations numériques, en passant par l'analyse théorique des modèles. Le département accueille aussi depuis 2007 l'équipe-projet IPSO commune avec l'INRIA. Des collaborations existent avec d'autres laboratoires de l'antenne.

Formes optimales

- Comment trouver la forme d'une goutte, d'une bulle de savon ?
- Quelle géométrie donner à une structure pour qu'elle soit à la fois rigide et légère ?
- Comment détecter automatiquement les contours d'une image, les fissures d'un matériau ?

Toutes ces questions font appel à un outil commun, l'optimisation mathématique de formes. La recherche, l'étude et la simulation de formes optimales nécessitent des outils mathématiques et algorithmiques de plus en plus sophistiqués. La description des états transitoires lors de l'évolution vers la forme d'équilibre (ex: formes de gouttes) est aussi un sujet brûlant.

La montée en puissance des moyens de calcul et de la modélisation a donné un essor nouveau à cette branche des mathématiques qu'est l'optimisation de forme, à la croisée d'une multitude d'applications, et mêlant harmonieusement analyse et géométrie.



Évolution de la forme d'une goutte d'eau à la surface de la glycérine

Problèmes de réaction-diffusion

Les systèmes de réaction-diffusion interviennent dans la modélisation de nombreux phénomènes en chimie, biologie, écologie, sciences de l'environnement ou médecine.

Les enjeux scientifiques sont énormes et très actuels : évolution des concentrations au cours d'une réaction chimique, tailles de populations en interaction, explosions, production et dispersion de polluants... De tels systèmes d'équations sont intensivement utilisés pour les simulations numériques. La complexité croissante des modèles conduit à de nouvelles questions algorithmiques et mathématiques, et l'existence même de solutions reste un défi lorsque la diffusion n'est pas isotrope, ou diffère selon les espèces en présence.

Equations stochastiques

Lorsqu'un système physique ou biologique évolue au cours du temps, des facteurs extérieurs aléatoires conditionnent souvent son évolution : milieu non homogène, fluctuations de température...

On parle alors de "bruit", car ces facteurs aléatoires brouillent le message initial. On peut modéliser mathématiquement un tel système par des équations aux dérivées partielles stochastiques. Leur étude (existence de solutions, propriétés qualitatives, simulation numérique...) nécessite l'utilisation de la théorie des équations aux dérivées partielles, des probabilités ainsi que du calcul scientifique. Le terme de bruit complique l'étude mais, paradoxalement, permet d'aller plus loin que dans le cas déterministe. On obtient ainsi des résultats théoriques surprenants sur les équations de Navier-Stokes (intervenant en mécanique des fluides) ou sur la propagation d'ondes.

Amplitude d'une onde solitaire de l'équation de Schrödinger bruitée



Méthodes numériques géométriques

La propagation d'ondes lasers dans des fibres optiques, la mécanique céleste, la dynamique moléculaire, et bien d'autres phénomènes physiques peuvent être modélisés par des équations différentielles, trop complexes pour être résolues explicitement.

La simulation numérique permet d'obtenir des approximations de leurs solutions, mais il importe alors de mettre en oeuvre des méthodes respectant les propriétés qualitatives des solutions (symplecticité, symétries, invariants...).

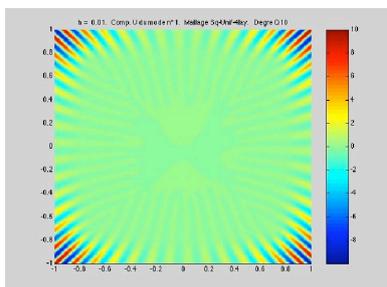
Calculs haute performance pour des phénomènes physiques localisés

De nombreux problèmes physiques présentent naturellement une structure à plusieurs échelles, où des effets microscopiques modifient substantiellement le comportement macroscopique.

Par exemple la présence de micro-défauts dans un matériau (bulles de gaz au sein d'un matériau obtenu par fusion, granulats dans un bloc de béton ou encore aspérités à la surface d'une carrosserie) influe sur son comportement mécanique. Leur traitement, tant théorique que numérique, requiert une analyse mathématique fine.

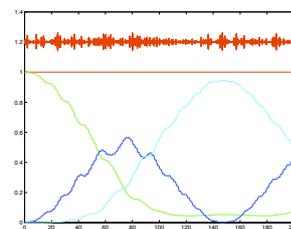
Notre approche est basée sur une analyse asymptotique des équations gouvernant le phénomène en fonction de la taille des micro-défauts. La solution limite correspond au domaine sans défaut et peut être calculée à moindre coût sur un maillage grossier. La perturbation induite par les micro-défauts est essentiellement concentrée au voisinage de ceux-ci et peut être représentée par un profil défini dans une géométrie modèle.

Ces résultats fournissent de nouvelles méthodes numériques précises tout en conservant un coût de calcul modéré. De même, la détermination des zones d'apparition de la supraconductivité repose sur le calcul de paramètres d'ordre localisés en certains points de la surface du matériau, et fortement oscillants, rendant les calculs numériques particulièrement délicats.



Localisation des électrons supraconducteurs, calcul effectué avec le code Mélima développé au sein de l'IRMAR

En dépit des avancées théoriques des vingt dernières années, avec notamment l'introduction des schémas symplectiques, des difficultés essentielles subsistent dans certaines situations : citons, à titre d'exemple, le cas des équations hautement oscillantes, où l'enjeu est de concevoir des méthodes respectant les invariants adiabatiques de la solution, sans être contraint de suivre ses petites oscillations.



Composantes (bleu et vert) de la solution, énergie et énergie oscillante (rouge) du problème de Fermi-Pasta-Ulam

Ces recherches sont menées dans le cadre de l'équipe-projet IPSO, commune à l'INRIA et à l'ENS-Cachan.

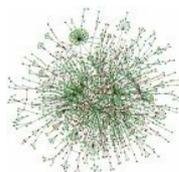
Classification en statistique

Réduire la complexité d'un ensemble de données, c'est simplifier – et donc rendre plus facilement utilisable et interprétable – une information éventuellement pléthorique.

En statistique, cet objectif de réduction de la complexité est à la base du clustering : l'enjeu est de construire des méthodes automatiques afin de dégager des groupes de données au comportement similaire, appelés clusters.

Le recours à des méthodes automatiques, et donc à des algorithmes, qui est évidemment impératif eu égard au grand nombre de données qu'il faut traiter, l'est aussi pour des problèmes de dimension de l'espace des observations : s'il est envisageable de construire visuellement ces clusters pour des données évoluant dans un espace de petite dimension, cela n'est plus possible lorsque la dimension devient trop grande.

Une analyse mathématique des nombreuses méthodes de clustering permet de mieux les comprendre et de comparer leurs performances, afin d'éclairer les interprétations qui peuvent en être données.



Interactions entre protéines. Ici, le recours à une méthode de clustering permet de classer ces interactions par type.